

گسسته

کنکور ریاضی دوازدهم
(۲)

مدرس:

استاد خیراللهی

یارس ابران

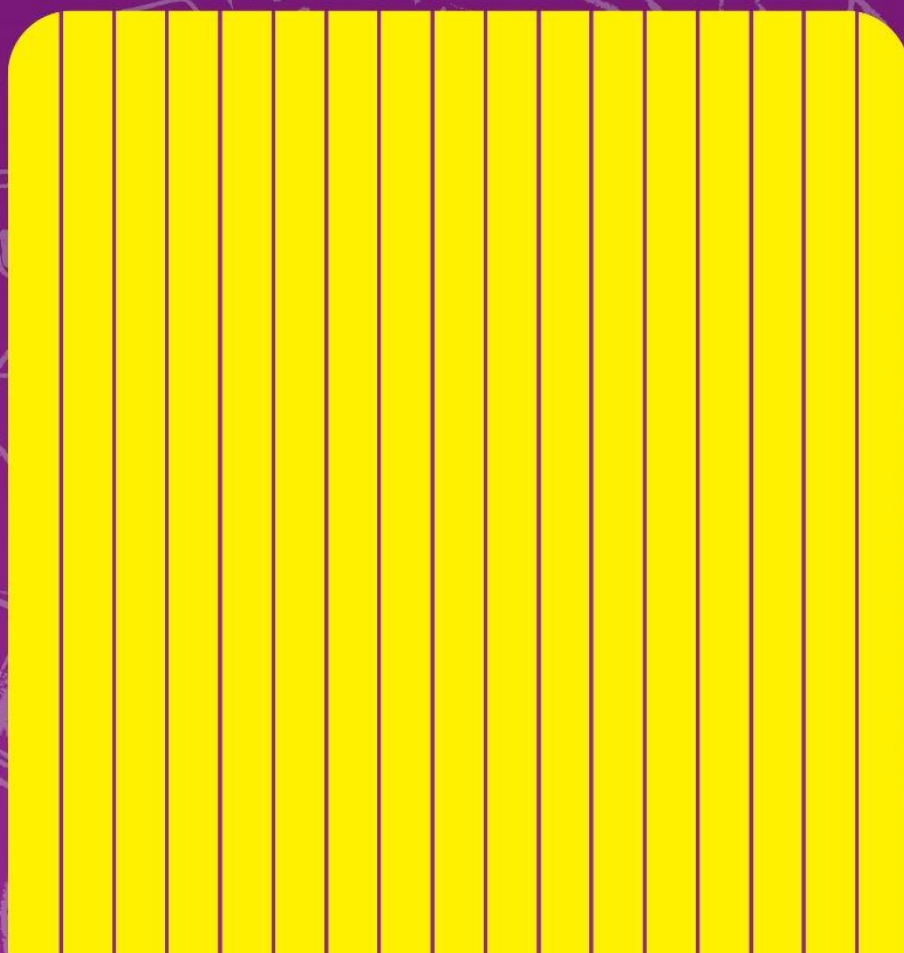
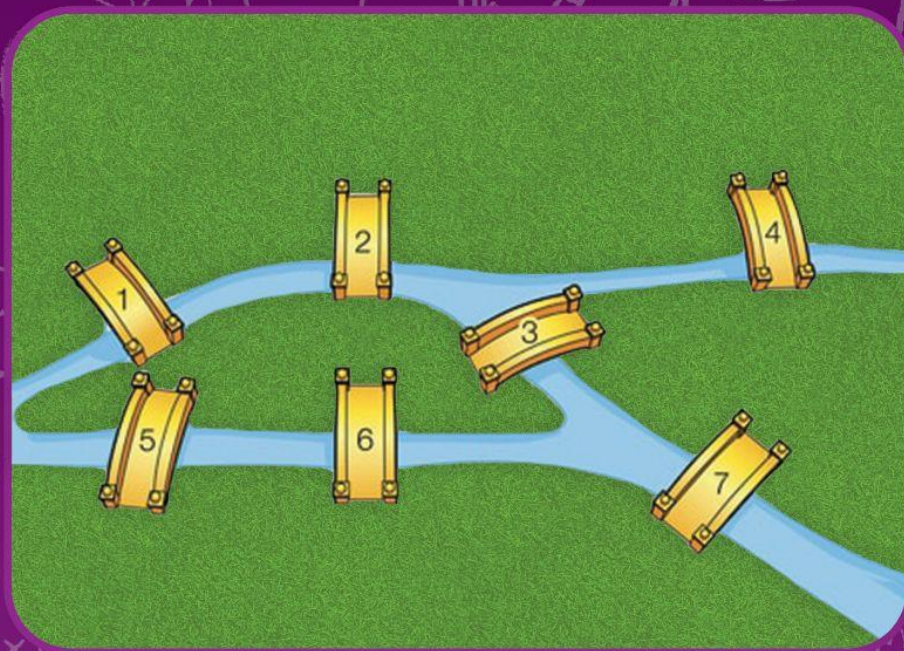
دبیرستان غیردولتی پران

www.bpischool.ir

۱۴۰۴-۱۴۰۵

فصل دوم

گراف

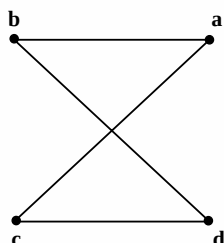




درس اول: معرفی گراف

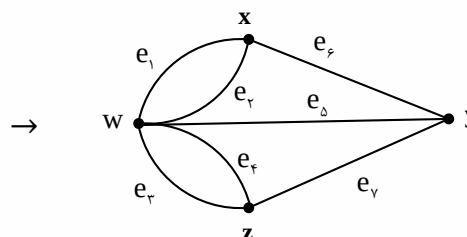
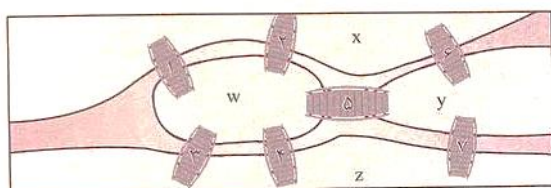
در دنیای اطراف ما، وضعیت های فراوانی وجود دارند که می توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه نقاط و خطوطی که برخی از این نقاط را به یک دیگر متصل می کنند، توصیف کرد. به عنوان مثال در بعضی نقشه های بین شهری برای نشان دادن یک شبکه ارتباطی جاده ای، از نموداری استفاده می کنند که در آن، نقاط بیانگر شهر ها و خطوط بیانگر جاده های بین شهرهاست. به این ساختار که شامل تعدادی نقطه و خطوطی است که این نقاط را به یکدیگر متصل می کنند، گراف گفته می شود.

مثال: شهرهای a, b, c, d را در نظر بگیرید به طوری که از شهر a به شهرهای b و c و از شهرهای b و c به شهر d جاده موجود باشد، گراف این چهار شهر به صورت مقابل می باشد:



رودخانه شهر کونیگسبرگ، این شهر را به ۴ قسمت تقسیم می کرد که با هفت پل به هم مرتبط بودند. ساکنان در پیاده روی طولانی خود در روزهای تعطیل سعی می کردند مسیری بیابند که پیاده روی را از نقطه ای در شهر شروع کنند و از تمامی پل ها فقط یکبار بگذرند و دوباره به نقطه شروع باز گردند اما هیچ کس موفق به انجام آن نمی شد و این سوال که آیا این کار امکان پذیر است یا نه، سال ها ذهن برخی از اهالی این شهر را به خود مشغول کرده بود.

در سال ۱۷۳۶ لئوناردو اویلر، گراف مربوط به ۴ قسمت شهر و ۷ پلی که آن ها را به هم متصل می کرد را رسم کرد و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان پذیر نیست زیرا بیان داشت که این عمل فقط در صورتی امکان پذیر است که تعداد پل های متصل به هر قسمت شهر، زوج باشد و با حل این مسئله نظریه گراف ها را بنیان گذاشت.

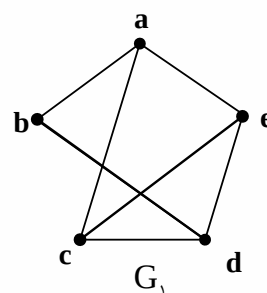
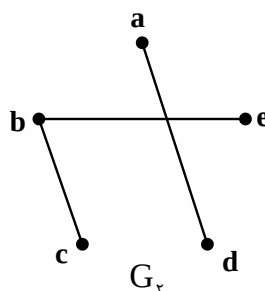
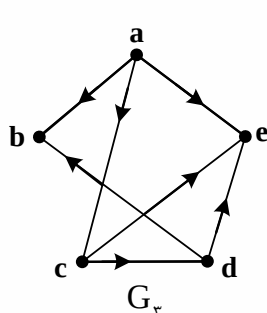


نکته: به نقاطی که در یک گراف وجود دارند به اصطلاح رأس و به خطوطی که این رأس ها را به هم متصل می کنند، یال گفته می شود.

مثال: فرض کنید پنج تیم به نام های a, b, c, d, e باید دو به دو با هم بازی کنند. برخی از بازی ها انجام شده است و نتایج زیر بدست آمده است:

تیم a تیم های b, c, e را برده است. تیم b از تیم های a و d شکست خورده است. تیم c تیم های d و e را برده است و از تیم a شکست خورده است. تیم d تیم های b و e را برده است و از تیم c شکست خورده است.

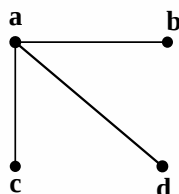
می توانیم وضعیت تیم ها را به صورت یک گراف رسم کنیم، به طوری که به ازای هر تیم یک نقطه در نظر بگیریم و دو نقطه را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر تیم های مربوط به آن نقاط با هم بازی کرده باشند. گراف G_1 این وضعیت را نشان می دهد. همچنین گراف G_2 مربوط به بازی هایی است که هنوز انجام نشده است. در گراف G_3 پاره خط های جهت دار از برنده به سوی بازنده رسم شده است که به گراف G_3 ، گراف جهت دار گفته می شود.



گراف ساده

یک گراف ساده از دو مجموعه V و E تشکیل شده است که V مجموعه رئوس و E مجموعه یال های گراف می باشند و به صورت $G(V, E)$ نمایش داده می شود.

مثال: گراف G به صورت مقابل می باشد که در آن دو مجموعه V و E عبارتند از:



$$V(G) = \{a, b, c, d\}, E(G) = \{ab, ac, ad\}$$

در گراف ساده چند تعریف و قرارداد مهم وجود دارد که عبارتند از:





۱- در مجموعه E ، دو عضو ab و ba یکی هستند. به عبارت بهتر یالی که دو رأس a و b را در گراف ساده به هم متصل می کند ab یا ba نامیده می شود.

۲- به تعداد رأس های یک گراف نیز مرتبه گراف گفته می شود و آن را با p نمایش میدهند. به طور مثال اگر چهار رأس وجود دارد مرتبه گراف برابر ۴ است. ($p = 4$)

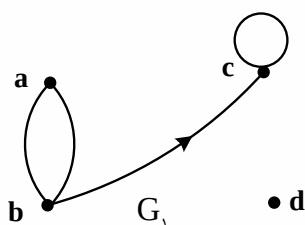
۳- به تعداد یال های گراف نیز اندازه گراف گفته میشود و آن را با q نمایش می دهند. بطور مثال اگر در گرافی سه یال وجود دارد، اندازه گراف برابر ۳ است. ($q = 3$)

۴- دو رأس که به وسیله یک یال به هم متصل می شوند را دو رأس مجاور (همسایه) می گوئیم.

۵- اگر دو یال به یک رأس متصل باشند آن دو یال را مجاور می گوئیم.

۶- مجموعه تمام رأس هایی از گراف G که با رأس v مجاورند را مجموعه همسایه های باز رأس v در گراف G میگوئیم و آن را با $N_G(v)$ نمایش می دهیم. به طور مثال در گراف قبل $N_G(a) = \{b, c, d\}$ می باشد. با اضافه کردن رأس v به $N_G(v)$ ، مجموعه همسایه های بسته رأس v به دست می آید و آن را با $N_G[v]$ نمایش میدهم. به طور مثال در گراف قبل $N_G[a] = \{a, b, c, d\}$ می باشد.

سوال مهم: آیا همه گراف ها ساده می باشند؟ برای جواب این سؤال، ابتدا به گراف شکل مقابل دقت کنید.



در گراف G_1 با چند اصطلاح مهم آشنا می شویم که عبارتند از:

۱- دو یالی که بین دو رأس a و b وجود دارند را یال های موازی می گوئیم.

۲- در رأس c یالی وجود دارد که ابتدا و انتهایش یکی است که به اصطلاح به این یال، طوقه گفته می شود. به عبارت دیگر طوقه یالی است که یک رأس را به خودش متصل می کند.

۳- رأس d با هیچ رأسی مجاور نیست یا به عبارت دیگر هیچ یالی به رأس d متصل نیست به همین جهت به رأس d ، رأس منفرد یا ایزوله گفته می شود.

۴- یالی که بین دو رأس b و c قرار دارد، دارای جهت می باشد یعنی یال از رأس b شروع می شود و به رأس c ختم میشود و نام آن bc است و نمی توان به آن cb گفت. به این یال، یال جهت دار گفته می شود.

و اما جواب سوال، گرافی که دارای یال های موازی یا طوقه یا یال جهت دار می باشد، گراف ساده نیست.

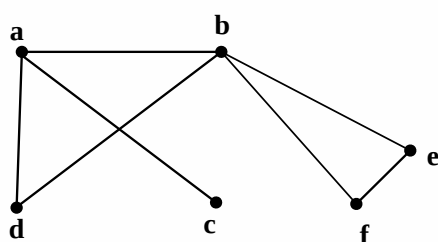




درجه رأس ها در گراف (degree)

تعداد یال هایی که به یک رأس متصل است را درجه آن رأس می گوئیم. درجه رأس v را با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می دهیم.

مثال: در گراف شکل مقابل داریم:



$$\begin{aligned} \deg(a) &= 3 & \deg(b) &= 4 & \deg(c) &= 1 \\ \deg(d) &= 2 & \deg(e) &= 2 & \deg(f) &= 2 \end{aligned}$$

در تعریف درجات رئوس یک گراف چند قرارداد و اصطلاح مهم وجود دارد که عبارتند از:

۱- یک رأس را فرد می گوئیم هر گاه درجه آن رأس عددی فرد باشد و یک رأس را زوج می گوئیم هر گاه درجه آن رأس عددی زوج باشد.

۲- در بین درجات رئوس یک گراف، بزرگترین عدد را ماکسیمم درجه می گوئیم و آن را با Δ (دلتای بزرگ) نمایش می دهیم، همچنین کوچکترین عدد را مینیمم درجه می گوئیم و آن را با δ (دلتای کوچک) نمایش می دهیم.

در گراف قبل به تعداد یال ها دقت کنید ($q = 7$)، اگر رئوس a و b و ... و e را با $v_1, v_2, \dots, v_6$ نمایش دهیم، ملاحظه

می شود که جمع درجات دو برابر تعداد یال هاست و به عبارت بهتر می توان نوشت $\sum_{i=1}^6 \deg(v_i) = 2q$ ، به دلیل این

که هر یال دو بار شمرده می شود، به عنوان مثال یال be هم در درجه رأس b و هم در درجه رأس e شمرده می شود و دقیقاً این عمل برای تمام یال ها اتفاق می افتد.

نکته: در هر گراف ساده $G(V, E)$ مجموع درجات رئوس دو برابر تعداد یال هاست. به عبارت بهتر برای

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2q$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ داریم:}$$





۱. ثابت کنید اگر $\frac{2q}{p}$ میانگین درجات رئوس گراف باشد، در این صورت $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$ می باشد.

حل: می دانیم درجه هر رأس گراف، بین δ و Δ قرار دارد. بنابراین داریم:

$$\delta \leq \deg(v_i) \leq \Delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n \delta \leq \sum_{i=1}^n \deg(v_i) \leq \sum_{i=1}^n \Delta \Rightarrow p\delta \leq 2q \leq p\Delta \Rightarrow \delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

۲. گراف G دارای ۹ رأس است که دارای ۲ رأس درجه یک، ۴ رأس درجه سه، ۲ رأس درجه ۶ و یک رأس

درجه ۸ است. این گراف چند یال دارد؟

نکته: در هر گراف ساده تعداد رئوس فرد، عددی زوج است.

می دانیم ضرب یک عدد زوج در یک عدد زوج و ضرب یک عدد فرد در یک عدد زوج، عددی زوج می باشد و از طرفی ضرب عددی فرد در عددی فرد برابر عددی فرد می شود. بنابراین اگر تعداد رئوس فرد، فرد باشد و تعداد رئوس زوج هر عدد دلخواهی مد نظر قرار گیرد، داریم:

$$\text{فرد} = \text{زوج} + \text{فرد} \Rightarrow \text{فرد} = \text{زوج} + (\text{هر عددی زوج یا فرد} \times \text{زوج}) + (\text{فرد} \times \text{فرد})$$

درحالی که جمع درجات $2q$ می باشد که عددی زوج است، پس تعداد رئوس فرد نمی تواند فرد باشد.

اثبات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در

این صورت داریم $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$. از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج اند.

(چرا؟) بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ نیز عددی زوج است و این نتیجه می دهد که $n(A)$ عددی زوج است.



۳. در گرافی که ۱۶ رأس دارد تعداد رأس های زوج عددی و تعداد رأس های فرد عددی است.

(سراسری ریاضی ۸۶)

(۱) فرد - فرد (۲) فرد - زوج (۳) زوج - فرد (۴) زوج - زوج

۴. در گراف G از مرتبه ۸ که اندازه آن برابر ۱۳ است، دو رأس از درجه ۲، سه رأس از درجه ۳، x رأس از

درجه ۴ و y رأس از درجه ۵ وجود دارد. $x - 2y$ کدام است؟

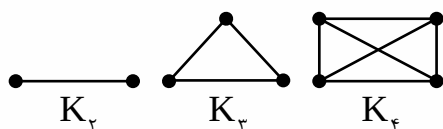
(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۲

۵. یک گراف ساده با ۵ رأس حداکثر چند یال دارد؟

حل: اگر بفواهیم یک گراف ساده با ۵ رأس، حداکثر یال را داشته باشد باید تمام رئوس آن به هم متصل باشند. میدانیم که برای به وجود آمدن یک یال دو رأس لازم است بنابراین اگر بفواهیم تمام یال های ممکن را به وجود آوریم، کافی است ۵ رأس از ۵ رأس موجود را انتخاب کنیم که $\binom{5}{2} = 10$ حالت مختلف می شود. بنابراین در گرافی ساده با ۵ رأس حداکثر ۱۰ یال وجود دارد.

گراف کامل

در بین گراف های ساده با p رأس، گراف کامل بیشترین تعداد ممکن یال را داراست که همان $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ یال می باشد. به عبارت دیگر در گراف کامل تمام رئوس با یکدیگر مجاورند. گراف کامل مرتبه p را با K_p نمایش می دهیم. شکل های مقابل همگی گراف کامل می باشند.

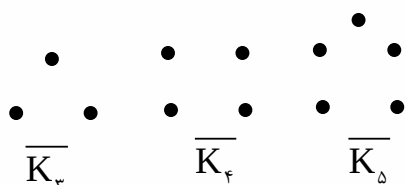




نکته: در گراف کامل K_p درجه تمام رئوس برابر $p - 1$ است زیرا هر رأس با بقیه رئوس مجاور است.

گراف تهی

گرافی که دارای p رأس باشد اما هیچ یالی نداشته باشد، به عبارت بهتر تمامی رئوس منفرد باشند. گراف تهی مرتبه p را به $\bar{K}_p$ نمایش میدهیم. شکل های مقابل همگی گراف تهی می باشند.



نکته: در یک گراف با p رأس حداکثر تعداد یال ها برابر $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ است که متعلق به گراف کامل K_p است و حداقل تعداد یال ها برابر صفر است که متعلق به گراف تهی $\bar{K}_p$ است. بنابراین در گرافی با p رأس و اندازه q داریم:

$$0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

۶. در کدام یک از گراف های کامل زیر، تعداد رئوس نصف تعداد یال هاست؟

K_6 (۱) K_7 (۲) K_8 (۳) K_9 (۴)

۷. در میان گراف های ساده با ۵۲ یال، گرافی که کمترین تعداد رئوس را داراست از کدام مرتبه است؟

۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)



۸. در گراف ساده G از مرتبه ۱۵ ، $\Delta = ۷$ است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۴) ۵۲

(۳) ۵۳

(۲) ۱۰۴

(۱) ۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴ درست است

یک گراف هنگامی بیشترین تعداد یال را دارد که همه رئوس از درجه Δ باشند. از آنجایی که $\Delta = ۷$ و $p = ۱۵$ می باشد. این عمل امکان پذیر نیست چون تعداد رئوس فرد، عددی فرد می شود. پس بهتر است که ۱۴ رأس از درجه $\Delta = ۷$ و یک رأس از درجه ۶ باشد زیرا ماکسیمم درجه بعد از ۷، عدد ۶ می باشد. داریم:

$$\sum_{i=1}^{15} \deg(v_i) = 2q \Rightarrow 2q = (14 \times 7) + (1 \times 6) \Rightarrow 2q = 104 \Rightarrow q = 52$$

۹. در گراف ساده G از مرتبه ۸، دو رأس دارای درجه ۲ می باشند. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۴) ۲۰

(۳) ۱۹

(۲) ۱۸

(۱) ۱۷

۱۰. یک گراف ساده ۲۰ یال دارد، این گراف حداکثر چند رأس درجه ۶ دارد؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

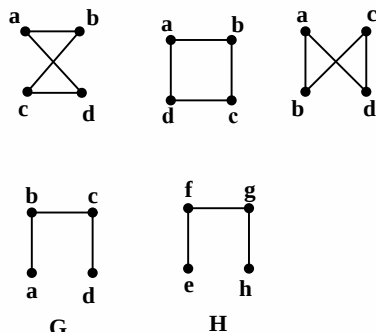
برای به دست آوردن حداکثر رأس درجه ۶ باید گرافی را مد نظر قرار دهیم که کمترین رأس را با ۲۰ یال داشته باشد تا گراف اصطلاحاً فشرده شود. می دانیم که گراف کامل مرتبه ۷ دارای $\binom{7}{2} = ۲۱$ یال است و درجات آن به صورت $(۶, ۶, ۶, ۶, ۶, ۶, ۶)$ می باشد. حال باید یک یال را حذف کنیم، بنابراین دوتا از رئوس یک عدد از درجاتشان کم میشود و درجات به $(۶, ۶, ۶, ۶, ۶, ۵, ۵)$ تبدیل می شود. پس با ۲۰ یال حداکثر ۵ رأس درجه ۶ داریم.





گراف های یکرخت

دو گراف G_1 و G_2 همسان می باشند، هرگاه $E(G_1) = E(G_2)$ و $V(G_1) = V(G_2)$. بنابراین اگر دو گراف همسان باشند، می توان آن ها را با نمودارهای یکسانی نمایش داد. به طور مثال گراف های مقابل همسان می باشند:



اما این امکان وجود دارد که دو گراف ناهمسان، نمودارهای یکسانی داشته باشند، به طور مثال دو گراف G و H را در نظر بگیرید، دقیقاً یکسان به نظر میرسند با این تفاوت که رئوس و یال ها، اسامی متفاوتی دارند.

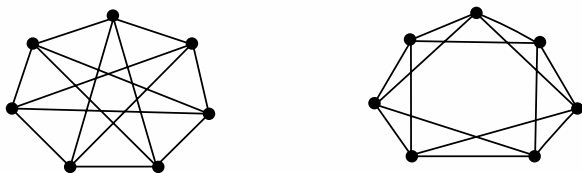
در حقیقت گراف های G و H همسان نیستند ولی یکرختند.

گراف هایی را یکرخت می گوئیم که بتوان با جا به جا کردن نام رئوس به دو مجموعه رئوس و یال های برابر رسید. به طور مثال برای دو گراف G و H با تغییر اسم e به a و f به b و g به c و h به d برای H داریم:

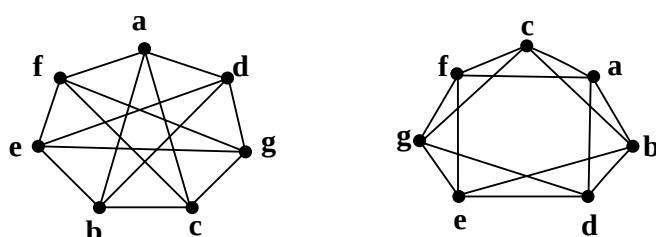
$$V(G) = \{a, b, c, d\} \quad , \quad E(G) = \{ab, bc, cd\}$$

$$V(H) = \{a, b, c, d\} \quad , \quad E(H) = \{ab, bc, cd\}$$

۱۱. نشان دهید دو گراف زیر با هم یکرختند.

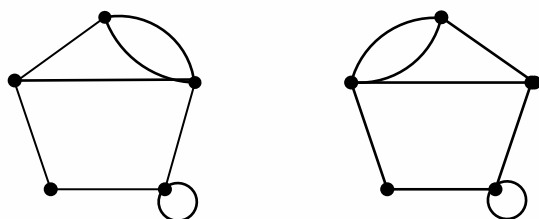


حل: اگر دو گراف را به صورت زیر نام گذاری کنیم، ملاحظه می شود که دو گراف یکرختند.





۱۲. نشان دهید دو گراف مقابل با هم یکرخت نیستند.



حل: هر چند که این دو گراف از نظر تعداد درجات ۲، ۳ و ۴ با هم برابرند اما با کمی دقت متوجه می‌شویم که این دو دارای ساختار یکسانی نمی‌باشند و عملاً نمی‌توان آن‌ها را به صورتی نامگذاری کرد که دقیقاً بر روی هم منطبق شوند.

تعداد گراف‌های ساده با رئوس نام‌گذاری شده

۱۳. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $v = \{a, b, c, d\}$ وجود دارد؟

حل: گرافی که دارای ۴ رأس نام‌گذاری شده باشد، حداکثر دارای $\binom{4}{2} = ۶$ یال خواهد بود. در گراف‌های مختلف هر یک از یال‌ها ممکن است وجود داشته باشند یا وجود نداشته باشند. بنابراین ۶ یال موجود است که برای هر کدام ۲ حالت وجود دارد که تعداد کل گراف‌ها برابر $۲^۶ = ۶۴$ تا می‌شود.

نکته: تعداد گراف‌های ساده با n رأس نام‌گذاری شده برابر $۲^{\binom{n}{2}}$ می‌باشد.

۱۴. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d\}$ با اندازه ۱ وجود دارد؟

۱۵. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d\}$ وجود دارد که شامل ۳ یال باشند در صورتی که:

(الف) در بین این ۳ یال، یال ad وجود داشته باشد و یال ac وجود نداشته باشد؟

(ب) در بین این ۳ یال، یال‌های ab و bc وجود داشته باشند؟





۱۶. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d\}$ وجود دارد به طوری که یال bd را شامل شود و cd را نداشته باشد؟

۱۷. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d\}$ وجود دارند به طوری که حداقل یکی از یال‌های ab و cd را دارا باشد؟

۶۰ (۴)

۵۶ (۳)

۵۲ (۲)

۴۸ (۱)

۱۸. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ وجود دارند که $\deg(a) = ۳$ باشد؟

۲۵۶ (۴)

۶۴ (۳)

۳۸۴ (۲)

۱۹۲ (۱)

تعداد گراف‌های ساده با رئوس نام‌گذاری نشده

۱۹. چند نوع گراف ساده از مرتبه ۴ وجود دارد؟

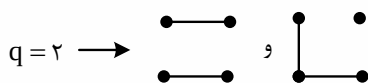
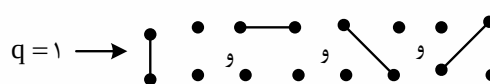
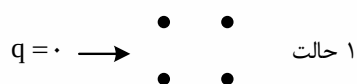
حل: چون در این نوع گراف، رئوس مشخص نیستند بنابراین باید گراف‌هایی را انتخاب کنیم در بین آن‌ها، گراف‌های

یکریخت وجود نداشته باشد، پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

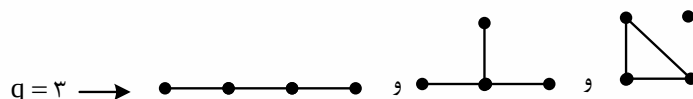




۱ حالت. زیرا همگی یک ریفیت اند.



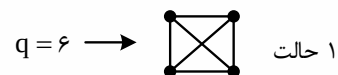
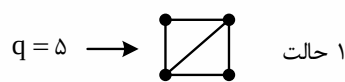
حالت ۲



حالت ۳



حالت ۲



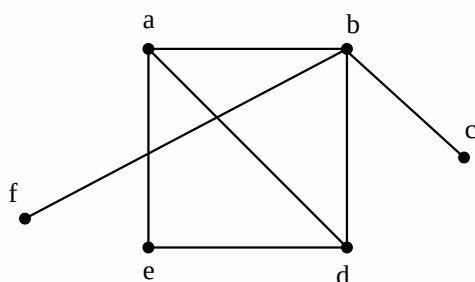
پس در کل ۱۱ گراف ساده از مرتبه ۴ وجود دارد که رئوس آن ها نام گذاری نشده اند.

دنباله درجات رئوس گراف

اگر درجات رئوس گراف را به صورت نزولی بنویسیم، دنباله ای به دست می آید که به آن دنباله درجات رئوس گراف می گوئیم.

مثال: در گراف مقابل از آن جایی که $\deg(a) = \deg(d) = 3$, $\deg(b) = 4$, $\deg(c) = \deg(f) = 1$

و $\deg(e) = 2$ می باشد، داریم:



$\Rightarrow (4, 3, 3, 2, 1, 1)$ دنباله درجات رئوس گراف

۲۰. دنباله درجات یک گراف به صورت $(7, 7, 5, y, x, 3, 3, 2)$ می باشد، اگر اندازه آن ۱۷ باشد، $2x + y$ را

بیابید.





۲۱. کدام یک از گزینه های زیر می تواند دنباله درجات رئوس یک گراف ساده باشد؟

- (۱) (۴, ۳, ۳, ۲, ۱) (۲) (۶, ۵, ۳, ۳, ۲, ۱) (۳) (۵, ۳, ۳, ۲, ۱, ۰) (۴) (۴, ۴, ۲, ۲, ۲)

پاسخ: گزینه ۱۴ درست است. گزینه (۱) نمی تواند باشد زیرا تعداد رئوس فرد، عددی فرد است.

گزینه (۲) نمی تواند باشد زیرا در گراف های ساده $\Delta < p$ می باشد.

گزینه (۳) نمی تواند باشد زیرا $\Delta = ۵$ و $p = ۶$ ، بنابراین یکی از رئوس از درجه $p-۱$ است و با بقیه رئوس مجاور است پس $\delta \geq ۱$ می باشد.

۲۲. در یک گراف ساده از مرتبه ۶ دنباله درجات رئوس آن به کدام یک از صورت های زیر می تواند باشد؟

(سراسری ریاضی ۸۵)

- (۱) (۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۰) (۲) (۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۱)

- (۳) (۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۱) (۴) (۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱)

پاسخ: گزینه ۱۴ درست است.

گزینه (۱) نمی تواند باشد زیرا یکی از رئوس از درجه $p-۱$ است بنابراین $\delta \geq ۱$.

گزینه (۲) نمی تواند باشد زیرا تعداد رئوس فرد، عددی فرد است.

گزینه (۳) نمی تواند باشد زیرا درجه $p-۱$ و $p-۲$ داریم، یعنی یکی از رئوس با بقیه مجاور است و $\delta \geq ۱$ می شود و درجه دیگر

$p-۲$ نیز به همه غیر از یکی متصل است پس باز هم $\delta \geq ۱$ می شود اما نمی تواند تعداد درجات δ بیش از یکی باشد.

نکته: برای تشخیص دنباله درجات گراف های ساده باید شروط زیر را در نظر گرفت که عبارت اند از:

۱- تعداد رئوس فرد باید عددی زوج باشد.

۲- در صورتی که n درجه $p-۱$ موجود باشد، در این صورت $\delta \geq n$ می باشد.

۳- درجه تمام رئوس باید کوچکتر از p باشند.

۴- در صورتی که درجات $p-۱$ و $p-۲$ داشته باشیم فقط یک رأس می تواند دارای درجه ۱ باشد و $\delta \geq ۱$.

۵- در هر گراف ساده حداقل دو رأس با درجه برابر وجود دارد. همچنین می توان از رأس های درجه صفر صرفه نظر کرد. به عبارت بهتر اگر گرافی k رأس درجه صفر داشته باشد در این صورت $\Delta < p-k$ است.



الگوریتم هاول - حکیمی برای تشخیص دنباله گرافی

دنباله هایی وجود دارند که همه شروط نکته قبل را دارا می باشند اما دنباله گرافی نیستند، برای تشخیص دنباله گرافی، الگوریتمی در سال ۱۹۵۵ توسط هاول (اهل جمهوری چک) و بعد ها در سال ۱۹۶۲ توسط سیف الله لوئیس حکیمی (اهل ایران) منتشر شد که در نظریه گراف به الگوریتم هاول - حکیمی شهرت یافت و روش کار آن به صورت زیر است:

۱- بزرگترین جمله دنباله را حذف کرده و به اندازه آن، جملات بعد از آن را جدا کرده و از هر کدام یک واحد کم کنیم.

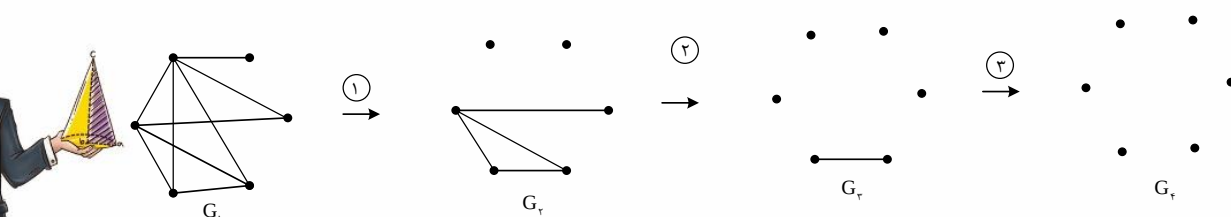
۲- باز هم دنباله را به صورت نزولی مرتب می کنیم و دستور ۱ را اجرا میکنیم. این کار را مجدداً تکرار می کنیم تا به دنباله ای برسیم که همه جملات آن صفر است.

نکته: اگر فرض کنیم بزرگترین جمله دنباله a باشد، در صورتی که در a جمله بعد از آن در اجرای دستور اول هاول - حکیمی به جمله صفر برسیم، این دنباله گرافی نمی باشد.

۲۳. آیا دنباله $(4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$ ، دنباله درجات یک گراف ساده است؟

۲۴. آیا دنباله $(5, 5, 4, 4, 2, 2)$ دنباله درجات یک گراف ساده است؟

مفهوم الگوریتم هاول - حکیمی را با استفاده از گراف ها در مراحل مختلف متذکر می شویم. به دنباله درجات گزینه ۴ تست ۲۲ دقت کنید. گراف G_1 مربوط به این دنباله است و به وسیله شکل، مراحل الگوریتم هاول - حکیمی را پیش میبریم.

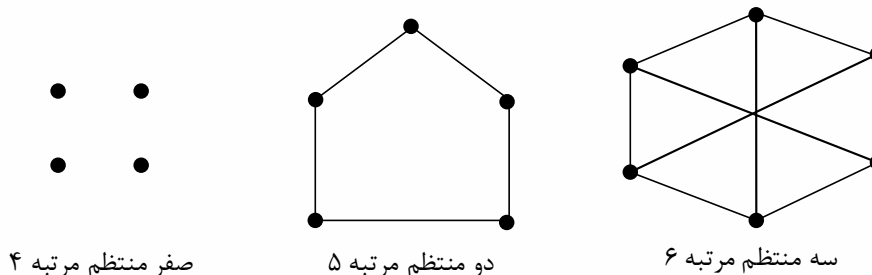




بنابراین گراف متناظر با دنباله درجاتی قابل رسم می باشد اگر و فقط اگر بقیه گراف ها در مراحل بعد قابل رسم باشند.
پس اگر بقیه گراف ها قابل رسم نباشد گراف اولیه هم قابل رسم نخواهد بود.

گراف منتظم

اگر همه رئوس گرافی دارای درجه یکسانی باشند به آن گراف، گراف منتظم می گوئیم. به گرافی که درجه هر یک از رئوس آن برابر k باشد، یک گراف k -منتظم می گوئیم.



۲۵. یک گراف منتظم مرتبه ۱۵ دارای ۶۰ یال است. درجه هر رأس این گراف را بیابید.

۲۶. یک گراف ۸-منتظم دارای ۴۴ یال است. این گراف چند رأس دارد؟

نکته: در یک گراف r -منتظم مرتبه p داریم $rp = 2q$. از طرفی r و p هم زمان نمی توانند فرد باشند.

مثال: گراف ۳-منتظم مرتبه ۵ وجود ندارد زیرا تعداد رئوس فرد، عددی فرد نمی تواند باشد.

۲۷. چند مقدار برای p در گراف ۳-منتظم مرتبه p وجود دارد به طوری که تعداد رئوس این گراف از ۱۰ بزرگتر نباشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

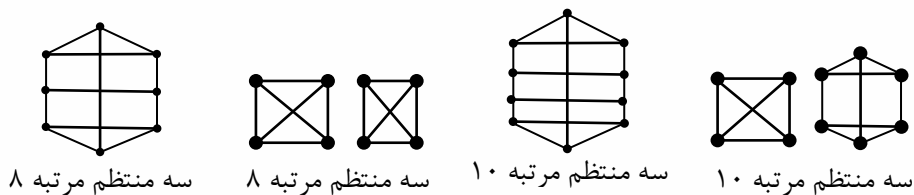
۶ (۲)

۳ (۱)



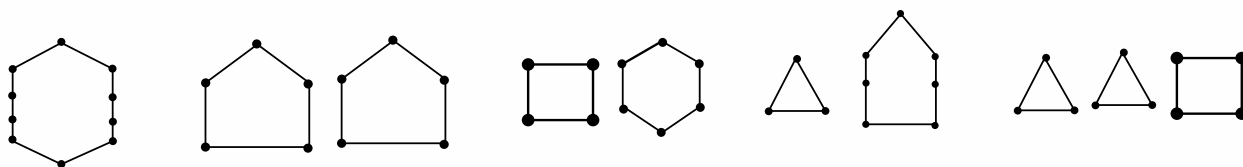


گراف های زیر نشان می دهند که گرافی منتظم می تواند انواع مختلفی داشته باشد.



۲۸. چند گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۰ وجود دارد؟

حل: از آن جایی که گراف ۲- منتظم است بنابراین p یا همان تعداد رئوس می تواند فرد باشد. از طرفی می توان گراف مرتبه ۱۰ را دو و سه جزئی رسم کرد.



بنابراین ۵ گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۰ می توان رسم کرد.

۲۹. کدام گزینه نمی تواند مرتبه گراف منتظمی باشد که اندازه آن برابر ۵۲ است؟

۲۶ (۴)

۱۶ (۳)

۱۳ (۲)

۵۲ (۱)

۳۰. اگر G یک گراف ۴- منتظم از مرتبه p و اندازه q باشد به طوری که $q = p^2 - 8p + 21$ ، به گراف G چند یال اضافه کنیم تا ۵- منتظم شود و چند یال به گراف G اضافه کنیم تا گراف کامل شود؟

۷- نشدنی (۴)

۷-۳ (۳)

۱۴- نشدنی (۲)

۱۴-۳ (۱)

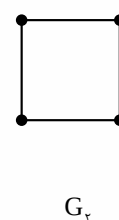
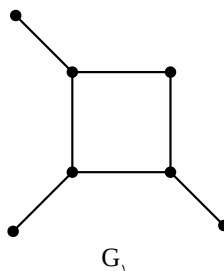
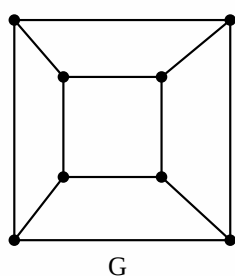




زیر گراف

گراف H را زیر گراف G می‌گوییم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد. به عبارت دیگر اگر مجموعهٔ رئوس گراف H زیر مجموعه ای از مجموعهٔ رئوس گراف G و مجموعهٔ یال های گراف H زیر مجموعه ای از مجموعهٔ یال های گراف G باشد، در این صورت گراف H را زیر گراف G می‌گوییم.

مثال: گراف های G_1 و G_2 زیر گراف هایی از گراف G می‌باشند.

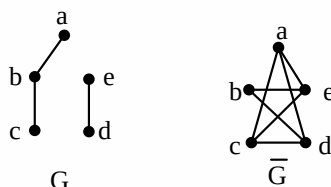


۳۱. گرافی p رأسی دارای q یال می‌باشد، این گراف چند زیر گراف p رأسی دارد؟

حل: از آنجایی که در این گراف q یال وجود دارد و هر کدام می‌توانند در زیر گراف باشند یا نباشند، برای هر یال p حالت امکان پذیر است. بنابراین این گراف دارای $2^q = 2^q$ زیر گراف p رأسی می‌باشد.

مکمل گراف ساده

مکمل گراف ساده G ، گرافی است که یال های آن در گراف کامل همان مرتبه موجود باشد اما در گراف G نباشد و آن را با $\bar{G}$ یا G^c نمایش می‌دهیم. به طور مثال به دو گراف مقابل دقت توجه کنید:



۳۲. اگر گرافی ساده از مرتبهٔ ۷ دارای اندازهٔ ۹ باشد، در این صورت مکمل آن چند یال دارد؟



نکته: اگر گراف ساده G از مرتبه p باشد، در این صورت مجموع یال های گراف G و مکمل آن برابر یال های گراف K_p یا همان گراف کامل مرتبه p می باشد.

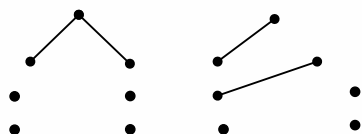
$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{p}{2}$$

همچنین اگر رأس دلخواه v_1 در گراف ساده G از مرتبه p دارای درجه a باشد، در گراف $\bar{G}$ درجه رأس v_1 برابر $p - 1 - a$ می باشد.

$$\deg(v_1)_G + \deg(v_1)_{\bar{G}} = p - 1$$

۳.۳. چند گراف ساده از مرتبه ۷ و اندازه ۱۹ وجود دارد؟

حل: بهتر است برای پاسخ به سؤال از گراف مکمل استفاده کنیم، زیرا گراف مکمل آن دارای ۲۰ یال است و آسان تر می توان آن را تجزیه نمود و از طرفی برای هر گراف، فقط یک مکمل وجود دارد.



از آنجایی که فقط ۲۰ گراف با اندازه ۷ و مرتبه ۷ وجود دارد بنابراین تعداد گراف های با اندازه ۱۹ و مرتبه ۷ هم ۲۰ تا می باشد.

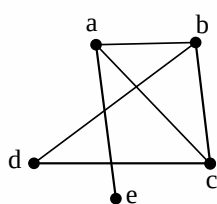
نکته: الف) اگر دو گراف یکرخت باشند، مکمل های آن دو نیز یکرخت هستند.

ب) با اطلاعاتی خاص در مورد هر گراف، انواع آن با انواع مکملش برابر می باشد.

مسیر

در گراف ساده G یک مسیر از رأس u به رأس v دنباله ای از رئوس متمایز گراف G است به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله با هم مجاور باشند و از طرفی هیچ کدام از رئوس گراف G بیش از یکبار در این دنباله استفاده نشود. طول مسیر با تعداد یال های آن برابر می باشد.

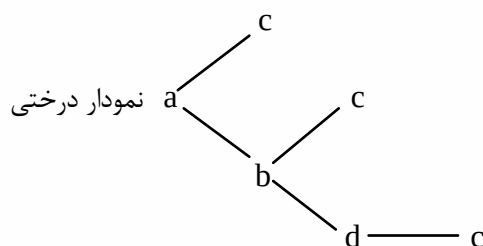
مثال: در گراف مقابل، تمام مسیرهای موجود از رأس a به رأس c به صورت زیر می باشد:



۱: مسیر به طول

۲: مسیر به طول

۳: مسیر به طول





نکته: الف) اگر در یک مسیر از m رأس عبور کنیم، آن مسیر را مسیری به طول $m - 1$ می نامیم که در واقع همان تعداد یال هاست.

ب) در گراف ساده G از مرتبه p ، حداکثر طول مسیر برابر است با $p - 1$ و حداقل طول مسیر برابر صفر است (هر رأس یک مسیر به طول صفر است).

ج) در مسیر جهت اهمیت ندارد. یعنی مسیر abc و cba ، هر دو یک مسیر به طول ۲ در گراف ساده G می باشند.

۳۴. در گراف K_5 چند مسیر به طول ۲ وجود دارد؟

نکته: در حالت کلی تعداد مسیرهای مربوط به طول m در گراف K_p برابر است با:

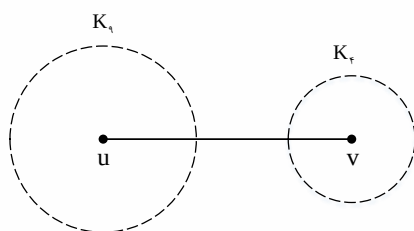
$$\frac{1}{2} \binom{p}{m+1} (m+1)! = \frac{p!}{2(p-m-1)!}, (1 \leq m \leq p-1)$$

برای درک بهتر این فرمول دقت کنید که مسیر به طول m دارای $m+1$ رأس است. پس می شود انتخاب $m+1$ رأس از p رأس که برابر $\binom{p}{m+1}$ می باشد. از طرفی این رئوس به $(m+1)!$ جابه جا می شوند که برای حذف مسیرهای تکراری باید بر ۲ هم تقسیم کنیم.

۳۵. گراف کامل مرتبه ۴ و گراف کامل مرتبه ۹ به وسیله یک یال به هم متصل شده اند و گراف G را تشکیل می دهند. حداکثر طول مسیر در گراف G کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ درست است. حداکثر مسیر در K_9 و K_4 به ترتیب برابر ۳ و ۸ می باشد، بنابراین بزرگ ترین مسیری که در K_9 به رأس v ختم می شود برابر ۳ و بزرگترین مسیری که در K_4 از رأس u شروع می شود برابر ۸ می باشد.



این دو مسیر به وسیله یال vu به هم متصل می شوند و مسیری به طول ۱۱ پدید می آورند.





۳۶. تعداد کل مسیرهای موجود در گراف K_5 کدام است؟

۱۵۵ (۴)

۱۵۰ (۳)

۱۶۵ (۲)

۱۶۰ (۱)

۳۷. کل مسیرهای به طول ۳ در گراف K_5 از رأس u به رأس v را بیابید.

نکته: در حالت کلی تعداد مسیرهای به طول m در گراف K_p بین دو رأس مشخص، برابر است با:

$$\binom{p-2}{m-1} \times (m-1)! = \frac{(p-2)!}{(p-m-1)!}, (1 \leq m \leq p-1)$$

برای درک بهتر این فرمول دقت کنید که مسیرهای به طول m دارای $m+1$ رأس است، از آنجایی که ۲ رأس مشخص است بنابراین باید $m-1$ رأس از $p-2$ رأس دیگر انتخاب شود و به $(m-1)!$ جابه جا می شوند.

۳۸. اگر u و v دو رأس دلخواه از گراف K_5 باشند، تعداد کل مسیرهای ممکنه از u به v کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۵ (۳)

۱۱ (۲)

۱۶ (۱)

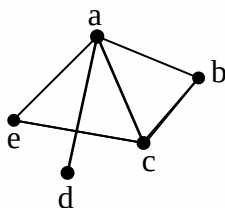




نکته: اگر $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ دنباله درجات گراف G باشد در این صورت تعداد مسیرهای به طول ۲ در گراف ساده G برابر است با:

$$(d_1) + (d_2) + \dots + (d_p)$$

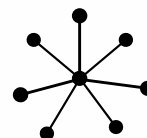
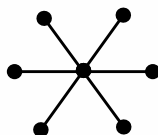
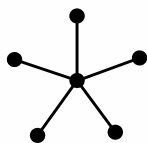
برای درک بهتر این نکته به گراف مقابل توجه کنید، درجه رأس a برابر ۴ است بنابراین رأس a به ۴ رأس دیگر متصل می باشد. از این ۴ رأسی که به a وصل است کافیست دو تا را انتخاب کنیم تا مسیری به طول ۲ پدید آید. به طریق مشابه برای بقیه رئوس نیز می توان همین استدلال را در نظر گرفت.



توجه: الف) به گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد اصطلاحاً گراف مسیری (Path graph) می گوئیم و آن را با P_n نمایش می دهیم. به طور مثال در شکل مقابل P_5 نمایش داده شده است.



ب) به گرافی که بین هر دو رأس غیر مجاور آن دقیقاً یک مسیر به طول ۲ وجود داشته باشد اصطلاحاً ستاره می گوئیم. به طور مثال گراف های زیر ستاره می باشند.



۳۹. در یک گراف ساده از مرتبه ۸، بین هر دو رأس غیر مجاور آن، فقط یک مسیر به طول ۲ وجود دارد. چند مقدار مختلف در دنباله گرافی آن وجود دارد؟

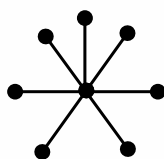
۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

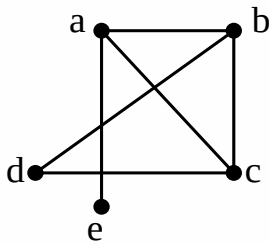
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ درست است. گرافی که بین هر دو رأس غیر مجاور آن فقط یک مسیر به طول ۲ وجود داشته باشد، ستاره است. بنابراین گراف به صورت مقابل و دنباله گرافی آن $(7, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ می باشد که دارای ۲ مقدار مختلف است.



در گراف ساده G یک دور، دنباله ای از رئوس متمایز گراف G است به طوری که ابتدا و انتهای آن یکسان باشد و هر دو رأس متوالی این دنباله با هم مجاور باشند و از طرفی هیچ کدام از رئوس گراف G بیش از یکبار (به جز ابتدا و انتها) در این دنباله استفاده نشود.

مثال: در گراف مقابل، تمام دورهای موجود به صورت مقابل می باشند:



دور به طول ۳: $abca, dbcd$

دور به طول ۴: $abdca$

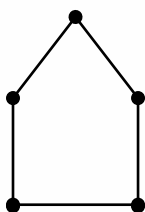
نکته: الف) دوری به طول m در گراف G دارای m رأس متمایز است.

ب) دنباله یک دور باید حداقل دارای ۳ رأس متمایز باشد زیرا با ۲ رأس متمایز نمی توان دور به وجود آورد، به عبارت بهتر حداقل طول یک دور برابر ۳ است.

ج) در دور یال ها مهم می باشند بنابراین دورهایی که دارای مجموعه یال های یکسان باشند با هم برابرند.

به طور مثال دورهای $abca, bcab, cabc, acba, bacb, cbac$ همگی یکسان می باشند.

توجه: گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را گراف دوری (Cycle graph) می گوئیم و آن را با C_n نمایش می دهیم. به طور مثال در شکل مقابل C_5 نمایش داده شده است.



۴۰. در گراف K_5 چند C_3 وجود دارد؟

حل: می دانیم هر C_3 یک دور به طول ۳ است. بنابراین ترجمه سؤال به این صورت است که در گراف K_5 چند دور به طول ۳ وجود دارد. در دور، مجموعه یال ها مهم می باشند همان طور که در نکته قبل بیان شد دورهای به طول ۳، $abca, bacb, acba, cabc, bcab, cbac$ همگی یکسان هستند و یک دور متسوب می شوند. پس در حالت کلی هر دور به طول m که از m رأس متمایز تشکیل شده است دارای $\frac{m}{2}$ نمایش تکراری به صورت ترتیب قرارگیری رئوس می باشد. برای یافتن تعداد دورهای به طول ۳ در گراف K_5 به ۳ رأس متمایز نیاز داریم که به $\binom{5}{3}$ طریق امکان پذیر است. این رئوس به ۳! قابلیت جابه جایی دارند که هر $2 \times 3 = 6$ تا نمایش آنها یک دور است بنابراین

$$\frac{3!}{2 \times 3} = 10$$





نکته: در حالت کلی، تعداد دورهای به طول m در گراف K_p برابر است با:

$$\binom{p}{m} \times \frac{m!}{2m} = \binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

۴۱. در گراف G با درجه رأس های ۲، ۲، ۲، ۳ و ۳ دو رأس از درجهٔ ماکسیمم غیرمجاورند، تعداد دورهای به

(سراسری ریاضی ۸۱)

طول ۴ کدام است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) صفر

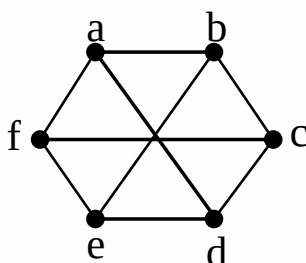
(سراسری ریاضی ۹۴)

۴۲. در یک گراف کامل از مرتبهٔ ۵، چند دور به طول ۵ وجود دارد؟

- ۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴)

(سراسری ریاضی ۸۹ و ۹۶)

۴۳. در گراف ۳- منتظم مقابل چند دور به طول ۴ وجود دارد؟



۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)





۴۴. در یک گراف کامل با حذف یک یال، ۵ دور به طول ۳ حذف می شود. مجموع مرتبه و اندازه این گراف کامل کدام است؟

۱۵ (۴)

۳۶ (۳)

۲۸ (۲)

۲۱ (۱)

۴۵. اگر از گراف کامل مرتبه ۵ با مجموعه رئوس $v = \{a, b, c, d, e\}$ یال ab حذف شود، در این صورت تعداد دورهای به طول ۴ در گراف حاصل کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۹ (۲)

۱۲ (۱)

نکته: با حذف یک یال در گراف K_p تعداد دورهای حذف شده به طول m ($1 \leq m \leq p$) برابر با تعداد مسیرهای به طول $m - 1$ از رأس v_i به رأس v_j می باشد به طوری که یال حذف شده $v_i v_j$ باشد.

نکته: الف) اگر در گرافی $\delta \geq 2$ باشد آنگاه این گراف قطعاً دور دارد.
ب) اگر در گرافی از مرتبه p و اندازه q ، $q \geq p$ باشد آنگاه این گراف قطعاً دارای دور است.
توجه داشته باشید عکس گزاره های بالا لزوماً درست نمی باشند بنابراین گزاره های بالا دو شرطی نمی باشند.

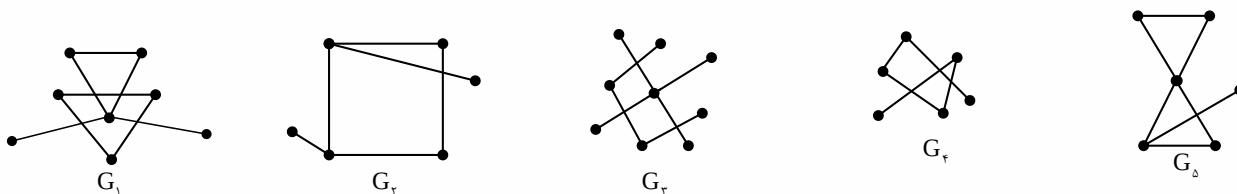
گراف همبند

هر گاه بین دو رأس گراف ساده G ، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد آن گراف را همبند می گوئیم.
در غیر این صورت گراف را ناهمبند می نامیم.





مثال: گراف های G_1 و G_3 را ناهمبند و گراف های G_2 و G_4 و G_5 را همبند می گوئیم.



۴۶. یک گراف از مرتبه ۸ حداقل چند یال داشته باشد تا همبند شود؟

نکته: الف) اگر در گرافی از مرتبه q ، $\Delta = p - 1$ باشد آن گاه گراف همبند است.

ب) یک رأس به تنهایی، یک گراف همبند می باشد زیرا برای ناهمبند بودن یک گراف باید حداقل دو رأس که بین آنها مسیری نباشد وجود داشته باشد.

۴۷. در گرافی از مرتبه ۶ حداکثر یالی که گراف می تواند ناهمبند باشد چقدر است؟

نکته: برای این که مطمئن شویم گرافی از مرتبه p حتماً همبند است باید $1 + \binom{p-1}{2}$ یال در آن گراف موجود باشد.

۴۸. در گرافی با ۱۰ رأس:

الف) حداقل چند یال داشته باشیم تا گراف همبند شود؟

ب) حداقل چند یال داشته باشیم تا مطمئن شویم گراف همبند است؟





۴۹. در گرافی با ۱۰ رأس:

الف) حداکثر چند یال می توان داشت تا گراف بتواند ناهمبند شود؟

ب) حداکثر چند یال می توان داشت تا مطمئن شویم گراف در همه ی حالت ها ناهمبند است؟

۵۰. از گراف ۴- منظم مرتبه ۷ حداقل چند یال دلخواه برداریم تا مطمئن شویم که گراف حاصل حتماً

ناهمبند است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۵۱. گرافی ناهمبند از مرتبه ۹ از سه بخش جدا از هم تشکیل شده است و دارای رأس منفرد نیست. این

گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۱ (۱)





(آزاد ریاضی ۸۱)

۵۲. گرافی دارای ۱۳ رأس و درجه هر رأس دو است. این گراف حداکثر چند دور دارد؟

۱۲ (۴)

۱ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



۵۳. چند نوع گراف ساده، همبند و نامنتظم که مجموع مرتبه و اندازه آن ۱۰ باشد وجود دارد؟

(سراسری ریاضی ۸۴)

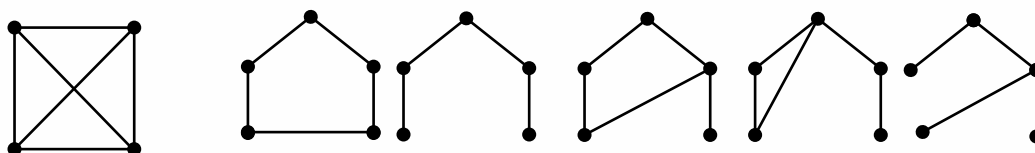
۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

از آنجایی که $p + q = 10$ و برای همبند بودن گراف باید $q \geq p - 1$ بنابراین فقط دو حالت $p = 9$ و $q = 1$ و همچنین $p = 5$ و $q = 5$ و $q = 5$ مطلوب می باشد که انواع گراف های آنها به صورت زیر می باشد.

از آنجایی که گراف نباید منتظم باشد بنابراین دو گراف اول قابل قبول نمی باشند. پس در کل ۴ گراف ساده با شرایط مورد نظر وجود دارد.



(فارج ریاضی ۸۶)

۵۴. گراف ناهمبند ۳- منتظم، دارای ۱۲ یال است. این گراف چند دور به طول ۴ دارد؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)





(آزاد ریاضی ۱۹)

۵۵. در یک گراف ناهمبند ساده $p = ۱۳$ و $q = ۶۵$ چند رأس با درجه ۱۱ وجود دارد؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

توجه: در گراف ناهمبند به هر بخش، یک مولفه همبندی می‌گوییم.





پرسش های تشریحی

۱. گراف G با مجموعه رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال های

$E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) درجه رأس های G را مشخص کنید.

پ) کدام رأس های گراف G با رأس f مجاورند؟

ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

ث) گراف H با مجموعه رئوس $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال های

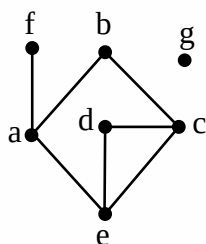
$E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت های الف) تا

ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲. گراف G را در نظر بگیرید.



الف) مجموعه های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

پ) مجموعه همسایه های باز رأس های f و g و e را بنویسید.

ت) اگر $N_G(x) = \{a, c\}$ ، آن گاه x کدام رأس است؟





فصل دوم: گراف

۳. گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه های $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 6$ تک عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

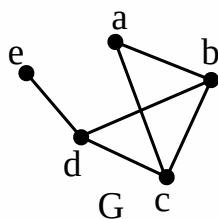
۴. در گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:

$$N_G(a) = \{b, c, d\}, N_G(b) = \{a, c\}, N_G(c) = \{a, b\}, N_G(d) = \{a, f\}, N_G(e) = \{\}, N_G(f) = \{d\}$$

گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید.

۵. گراف G رسم شده است. مجموع درجات رأس های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c را در گراف $\bar{G}$ تعیین نمایید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶. گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف Δ و δ را مشخص کنید.

۷. در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r -منتظم از مرتبه n رسم کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(ب) $n = 4, r = 2$

(الف) $n = 4, r = 1$

(ت) $n = 5, r = 3$

(پ) $n = 5, r = 2$

(ج) $n = 7, r = 3$

(ث) $n = 6, r = 4$





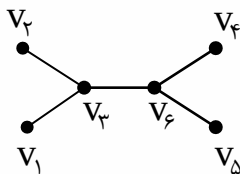
۸. ۷ نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده اند. نشان دهید ۷ نفر هفتم نمی تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۹. یک گراف ۵ رأسی غیر تهی k -منتظم بکشید که:

(الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

(ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۰. نمودار گراف G به صورت مقابل است.



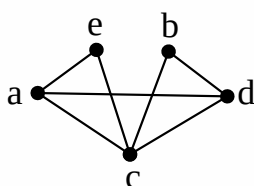
(الف) دنباله درجات رئوس گراف G را به صورت نزولی بنویسید.

(ب) چه یال هایی به گراف G اضافه شود تا گراف حاصل ۳-منتظم از مرتبه ۶ باشد.

۱۱. G گرافی ساده از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱ به طوری که درجه هر رأس آن ۲ یا ۳ می باشد. این گراف چند رأس از درجه ۲ دارد؟

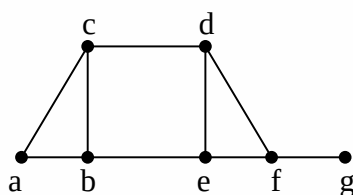
۱۲. در گراف ۶-منتظم از مرتبه p و اندازه q داریم $4q = 35 + p^2$. مرتبه و اندازه گراف را مشخص نموده و آن را رسم کنید.

۱۳. در گراف مقابل چند مسیر به طول ۳ از رأس a وجود دارد؟ آنها را بنویسید.





۱۴. در گراف روبه رو:



الف) دنباله درجات رئوس گراف را بنویسید.

ب) تمام مسیرهای از a به f را بنویسید.

ج) این گراف چند دور دارد؟ نام ببرید.

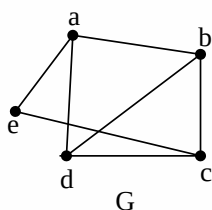
۱۵. گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ و $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6, v_6v_3\}$ مجموعه یال های آن را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

ب) تمام دورهای این گراف را بنویسید.



۱۶. نمودار مقابل مربوط به گراف G است.



الف) مجموعه رئوس و یال های گراف را بنویسید.

ب) کدام یال های را از گراف حذف کنیم تا یک گراف ۲- منتظم به دست آید؟

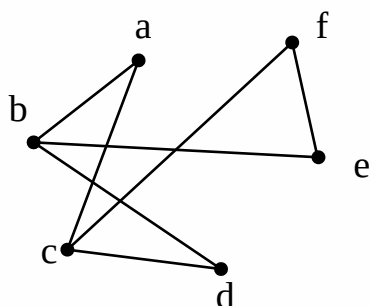
ج) چند یال به گراف اضافه کنیم تا گراف کامل مرتبه ۵ به دست آید؟





پاسخ های تشریحی

۱. نمودار گراف G به صورت روبه رو می باشد.



الف) $p = 6$ و $q = 7$

ب) $\deg(f) = 2, \deg(e) = 2, \deg(d) = 2, \deg(c) = 3, \deg(b) = 3, \deg(a) = 2$

پ) $N_G(f) = \{c, e\}$

ت) می دانیم $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$ است. از آنجایی که $q = 7$ است بنابراین مجموع درجات برابر ۱۴ است.

ث) مرتبه گراف H برابر ۴ و اندازه آن برابر ۶ است. $\deg(v_1) = 3$ و $\deg(v_2) = 3$ و $\deg(v_3) = 3$ و $\deg(v_4) = 3$ تمام رئوس با یکدیگر مجاور هستند زیرا گراف H ، گراف کامل مرتبه ۴ است. مجموع درجات گراف H برابر $12 = 4 \times 3$ می باشد.

۲.

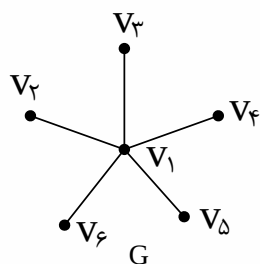
الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $E(G) = \{ab, ae, af, bc, cd, ce, de\}$

ب) $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$

پ) $N_G(f) = \{a\}$, $N_G(g) = \{ \}$, $N_G(e) = \{a, c, d\}$

ت) رئوسی که فقط با دو رأس a و c مجاور است رأس b می باشد.





A graph G with vertices a, b, c, d, e, f . The edges are $(a,b), (b,c), (c,d), (d,a), (a,c), (d,f)$. Vertex e is isolated.

$$\epsilon + q(\bar{G}) = \binom{5}{\gamma} \Rightarrow q(\bar{G}) = \epsilon$$
$$\begin{cases} \deg_{\bar{G}}(a) + \deg_G(a) = p - 1 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) + 2 = 4 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 2 \\ \deg_{\bar{G}}(c) + \deg_G(c) = p - 1 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) + 3 = 4 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) = 1 \end{cases}$$

٩.

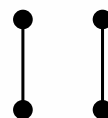
$$\binom{p}{r} = 36 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{r} = 36 \Rightarrow p^2 - p - 36r = 0$$

$$\Rightarrow (p - 9)(p + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 9 & \text{قق} \\ p = -8 & \text{غقق} \end{cases}$$

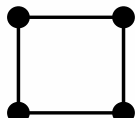




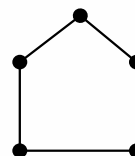
الف) ۱- منتظم مرتبه ۴



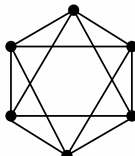
ب) ۲- منتظم مرتبه ۴



پ) ۲- منتظم مرتبه ۵



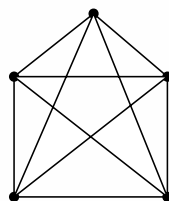
ث) ۴- منتظم مرتبه ۶



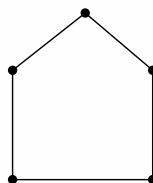
گراف ۳- منتظم مرتبه ۵ و ۳- منتظم مرتبه ۷ وجود ندارد زیرا در یک گراف تعداد رئوس فرد نمی تواند فرد باشد.

۸. از آن جایی که در گراف مربوط به دست دادن این ۷ نفر، ۶ رأس درجه ۲ وجود دارد، رأس هفتم نمی تواند درجه فرد باشد زیرا در یک گراف ساده تعداد رئوس فرد عددی زوج است.

۹. الف) بیشترین مقدار ممکن k برابر ۴ است و گراف ۴- منتظم مرتبه ۵ به صورت روبه رو می باشد.



ب) از آنجایی که گراف غیر تهی است، کمترین مقدار k برابر ۲ است زیرا گراف ۱- منتظم مرتبه ۵ وجود ندارد. گراف ۲- منتظم مرتبه ۵ به صورت روبه رو می باشد.





۱۰. الف) دنباله درجات گراف G به صورت $(3, 3, 1, 1, 1, 1)$ می باشد.

ب) در صورتی که یال های v_1v_2 و v_2v_4 و v_4v_5 و v_5v_1 به گراف G اضافه شود، گراف ۳- منتظم مرتبه ۶ می شود.

۱۱. اگر تعداد رئوس درجه ۲ را X و تعداد رئوس ۳ را Y در نظر بگیریم، داریم:

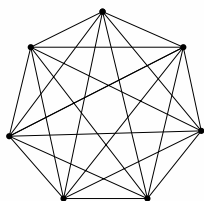
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases} \Rightarrow y = 6, x = 2$$

پس این گراف دارای ۲ رأس درجه ۲ می باشد.

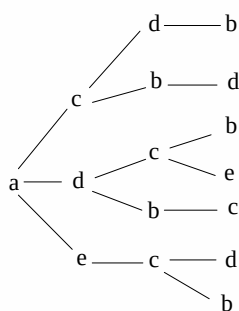
$$6p = 2q \Rightarrow 3p = q \xrightarrow{\text{داریم}} p^2 + 35 = 4q = 12p \Rightarrow p^2 - 12p + 35 = 0 \Rightarrow p = 5 \text{ یا } 7$$

از آنجایی که گراف ۶- منتظم است پس $p = 7$ قابل قبول است.

بنابراین گراف مورد نظر، گراف کامل مرتبه ۷ می باشد که دارای $\binom{7}{2} = 21$ یال است و به صورت روبه رو می باشد.



۱۲. با استفاده از نمودار درختی داریم:



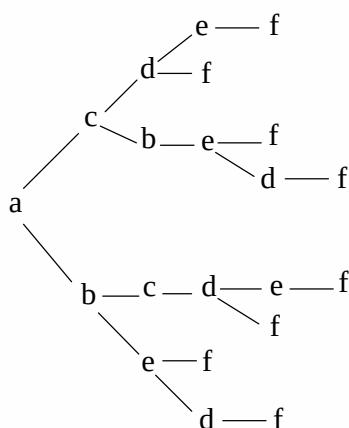
پس ۷ مسیر به طول ۳ از رأس a وجود دارد که عبارتند از $acdb$ و $acbd$ و $adcb$ و $adce$ و $adbc$ و $aecd$ و $aecb$.





۱۴. الف) دنباله درجات این گراف به صورت $(1, 2, 3, 3, 3, 3)$ می باشد.

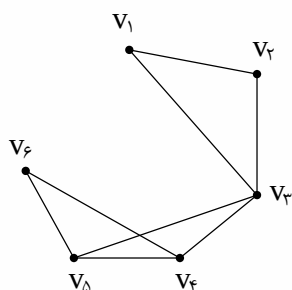
ب) با استفاده از نمودار درختی داریم:



۸ مسیر از رأس a به رأس f وجود دارد که عبارتند از $acdf$ و $acdef$, $acbef$, $acbedf$, $abef$, $abedf$, $abcdf$, $abcdef$

ج) ۶ دور وجود دارد که عبارتند از $efde$ و $bcdfeb$, $bcdeb$, $acdfeba$, $acdeba$, $acba$

۱۵. الف)



ب) ۴ دور وجود دارد که عبارتند از: $v_1v_2v_3v_1$, $v_3v_4v_5v_3$, $v_4v_5v_6v_4$, $v_3v_4v_5v_6v_3$

۱۶. الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e\}, E(G) =$

$\{ab, ad, ae, bc, bd, ce, cd\}$

ب) یال های bc و ad اگر حذف شوند گراف ۲- منتظم می شود.

ج) گراف G دارای ۷ یال است و می دانیم گراف K_5 دارای $10 = \binom{5}{2}$ یال می باشد. بنابراین ۳ یال باید

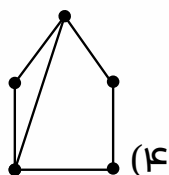
به گراف G اضافه کنیم تا گراف کامل شود که این ۳ یال عبارتند از ed و ac و be .



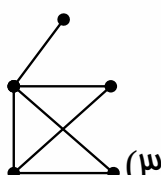


پرسش های چهار گزینه ای

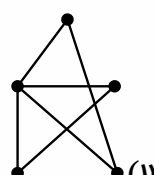
۱. اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{ac, ad, bd, be, cd, de\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و مجموعه یال های گراف G باشند، در این صورت نمودار گراف $G = (V, E)$ کدام است؟



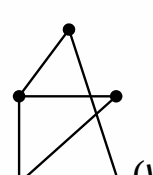
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۲. G گرافی ساده از مرتبه ۹ است. این گراف حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

۵۴ (۴)

۴۵ (۳)

۳۶ (۲)

۷۲ (۱)

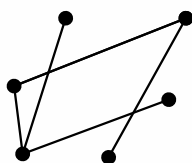
۳. گراف مقابل دارای چند زیرگراف غیر تهی ۶ رأسی دارد؟

۳۲ (۱)

۳۱ (۲)

۶۴ (۳)

۶۳ (۴)



۴. کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

(۱) تعداد رئوس فرد در یک گراف ساده می تواند عددی فرد باشد.

(۲) در یک گراف ساده، همواره $0 \leq \frac{2q}{p-1} \leq p$ برقرار است.

(۳) اگر یک گراف ساده، منتظم باشد گراف مکمل آن می تواند نامنتظم باشد.

(۴) اگر در گرافی ساده، درجه هر رأس حداقل یک باشد این گراف همبند است.

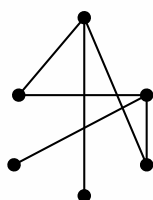
۵. برای گراف مقابل، حاصل $\Delta + \delta + q + p$ کدام است؟

۱۵ (۱)

۱۴ (۲)

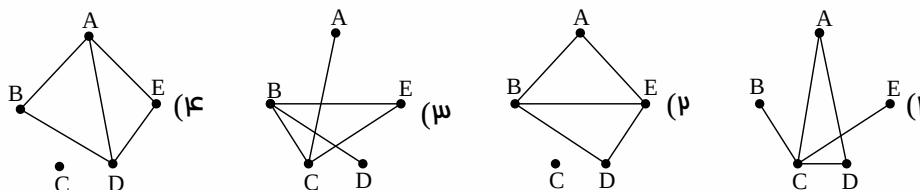
۱۶ (۳)

۱۷ (۴)





۶. در یک جمع ۵ نفره متشکل از افراد $\{A, B, C, D, E\}$ ، A با C و D ، B با C و A ، D ، B ، A با E دوست هستند. کدام گراف افرادی که دوست نیستند را نشان می دهد؟



۷. هشت تیم والیبال در لیگ جهانی دوبه دو با هم به صورت رفت و برگشت مسابقه می دهند. تعداد کل بازی ها کدام است؟

(۱) ۵۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۶ (۴) ۷۲

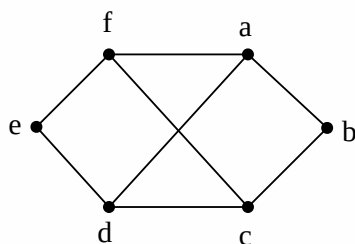
۸. در لیگ برتر فوتبال که دارای ۱۶ تیم است، در دور رفت مسابقات چند بازی انجام می شود؟

(۱) ۱۰۵ (۲) ۲۴۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۱۰

۹. در گراف ساده G از مرتبه ۱۵ کدام یک از موارد زیر امکان پذیر نمی باشد؟

(۱) $\Delta = 0$ (۲) $\delta = 0$ (۳) $\Delta = \delta = 12$ (۴) $\Delta = \delta = 3$

۱۰. چند مسیر از رأس b به رأس e در گراف مقابل وجود دارد؟



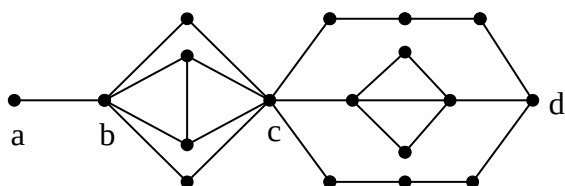
(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

۱۱. چند مسیر از رأس a به رأس d در گراف مقابل وجود دارد؟



(۱) ۲۴

(۲) ۳۰

(۳) ۳۶

(۴) ۴۲

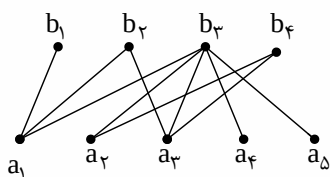


۱۲. کدام یک از گراف های زیر حتماً همبند است؟

(۱) -۱- منتظم مرتبه ۴ (۲) -۲- منتظم مرتبه ۵

(۳) -۲- منتظم مرتبه ۷ (۴) -۳- منتظم مرتبه ۸

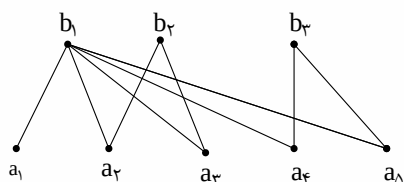
۱۳. شرکتی برای چهار شغل b_1, b_2, b_3, b_4 نیاز به استخدام کارمند دارد. پنج نفر به نام های a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 برای تصدی این شغل ها دواطلب شده اند. اگر هر فرد دقیقاً برای یک پست در نظر گرفته شود، استخدام چه افرادی قطعی است؟



(۱) a_4, a_2, a_1 (۲) a_5, a_3, a_1

(۳) a_4, a_3, a_2 (۴) a_3, a_2, a_1

۱۴. برای تصدی شغل های b_1, b_2, b_3 ، افراد a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 دواطلب شده اند. به چند طریق می توان افراد را برای شغل ها استخدام کرد به طوری که هر فرد دقیقاً یک شغل داشته باشد؟



(۱) ۸ (۲) ۱۰

(۳) ۱۲ (۴) ۱۸

۱۵. اگر در گرافی از مرتبه ۱۳، درجه هر رأس آن حداکثر ۵ باشد، در این صورت این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۱) ۳۵ (۲) ۳۳ (۳) ۳۲ (۴) ۳۴

۱۶. اگر در گرافی ساده $\delta = ۶$ و $q = ۲۸$ باشد، در این صورت ماکزیمم مرتبه این گراف کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۱۱





۱۷. اگر در گرافی ساده $p = ۷$ و $q = ۲۱$ باشد، در این صورت حاصل $p^2 - \delta q - \Delta^2$ کدام است؟

- (۱) -۱۱۵ (۲) -۱۱۹ (۳) -۱۱۳ (۴) -۱۱۷

۱۸. از گراف ۸- منتظم مرتبه ۹ حداقل چند یال حذف کنیم تا گراف ناهمبند شود؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۹. تعداد مسیرهای به طول ۲ بین دو رأس u و v در گراف کامل مرتبه p برابر ۹ است. چند دور به طول ۴

شامل رؤس u و v در این گراف وجود دارد؟

- (۱) ۱۲۶ (۲) ۱۶۵ (۳) ۳۷۸ (۴) ۱۰۸

۲۰. تعداد گراف های منتظم مرتبه ۷ از تعداد گراف های منتظم مرتبه ۶ چه تعداد کمتر می باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱. در گراف ساده و همبند G مجموع مرتبه و اندازه آن کدام است به طوری که $pq = ۳۰$ باشد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۳ (۳) ۱۱ (۴) ۱۷





۲۲. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $v = \{a, b, c, d, e\}$ می توان رسم کرد به طوری که

$q = 2$ و شامل یال cd باشد؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۲۳. گراف ساده ای از مرتبه ۱۵ می باشد. اگر گراف از ۶ بخش جدا از هم تشکیل شده باشد، حداکثر تعداد

یال های این گراف چند است؟

۳۶ (۴)

۴۵ (۳)

۴۲ (۲)

۳۲ (۱)

۲۴. گراف ساده ای از مرتبه ۱۷ و اندازه ۳۳ دارای بیشترین بخش جدا از هم می باشد. تعداد رئوس منفرد این

گراف کدام است؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۱۰ (۱)

۲۵. اگر مرتبه و اندازه گرافی ساده و ناهمبند به ترتیب ۱۴ و ۱۰ باشد، این گراف حداقل و حداکثر از چند بخش

جدا از هم تشکیل شده است؟

۹ و ۵ (۴)

۱۰ و ۵ (۳)

۹ و ۴ (۲)

۱۰ و ۴ (۱)





۲۶. کدام یک از گزینه های زیر امکان پذیر نمی باشد؟

- (۱) در یک گروه ۱۱ نفره، هر فرد فقط با ۴ نفر دوست است.
- (۲) در یک مهمانی ۱۲ نفره، هر فرد فقط با ۷ نفر احوال پرسی می کند.
- (۳) در یک تیم فوتبال ۷ نفره، هر بازیکن فقط به ۳ نفر در یک بازی پاس داده است.
- (۴) در یک جمع ۸ نفره، هر فرد فقط با ۵ نفر دست داده است.

۲۷. گراف K_n چند زیر گراف کامل دارد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۲۵ (۴) ۳۱

۲۸. چند گراف ساده، با مجموعه رئوس $v = \{a, b, c, d, e, f\}$ و اندازه ۲ می توان رسم کرد به طوری که دو یال با هم مجاور باشند؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

۲۹. چند گراف ساده، با مجموعه رئوس $v = \{a, b, c, d, e\}$ و اندازه ۲ می توان رسم کرد به طوری که دو یال با هم مجاور نباشند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۴۵ (۳) ۳۰ (۴) ۱۵



۳۰. در یک گراف ساده G از مرتبه 10 ، میانگین درجات رؤس برابر 3 است. اگر این گراف دارای 3 رأس منفرد باشد و در بقیه رأس ها داشته باشیم $3 < \deg v_i < 6$ ، تعداد رؤس زوج کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

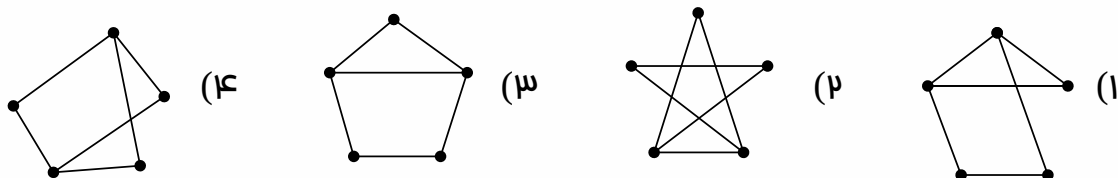
۳۱. گراف همبند G فاقد دور است. مجموع مرتبه و اندازه آن کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۶

۳۲. گراف همبند G فاقد دور و از مرتبه 7 می باشد. اگر در گراف G بین هر دو رأس غیر مجاور آن دقیقاً یک مسیر به طول 2 وجود داشته باشد، در این صورت $q(\bar{G})$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۳۳. کدام گراف با بقیه یکریخت نیست؟



۳۴. گراف ساده از مرتبه p و اندازه 32 می باشد. کمترین مقدار p کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰





۳۵. در گراف ساده G از مرتبه ۱۰، درجه یکی از رئوس ۵ است. کمترین مقدار $q(\bar{G})$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



۳۶. چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و اندازه ۶ وجود دارد به طوری که یال های de و ef را دارا باشند ولی یال ab را نداشته باشند؟

- (۱) ۱۶۵ (۲) ۳۳۰ (۳) ۷۱۵ (۴) ۴۹۵



۳۷. چند گراف ساده G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ و اندازه ۳ وجود دارد؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۸۴ (۳) ۱۶۵ (۴) ۲۱۰



۳۸. چند گراف ساده G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ وجود دارد که حداقل یکی از یال های bc, cd, de را دارا باشد؟

- (۱) ۳۸۴ (۲) ۸۹۶ (۳) ۸۶۹ (۴) ۳۴۸





۳۹. چند گراف ساده G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ وجود دارد به طوری که $\deg(e) = 1$ و اندازه G برابر ۴ باشد؟

۱۲۰ (۴)

۸۰ (۳)

۶۰ (۲)

۷۵ (۱)

۴۰. چند گراف مکمل برای گراف ساده G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ وجود دارد به طوری که $\deg(c) \geq 3$ باشد؟

۲۱۵ (۴)

۲۱۴ (۳)

۲۱۳ (۲)

۲۱۲ (۱)

۴۱. چند گراف ساده G با اندازه ۶ و مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ وجود دارد به طوری که فقط شامل یال ab یا فقط شامل یال cd باشد؟

۱۲۴ (۴)

۱۱۴ (۳)

۱۲۶ (۲)

۱۱۲ (۱)

۴۲. در گراف ساده G از مرتبه ۱۰، درجه دو رأس برابر ۲ است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۳۱ (۴)

۲۹ (۳)

۳۲ (۲)

۲۸ (۱)





۴۳. اگر گرافی ۴- منتظم دارای ۴۸ یال باشد، در این صورت مرتبه گراف کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۹۶ (۴)

۴۴. اگر گراف G دارای ۷۳ یال و مکمل آن دارای ۱۸۰ یال باشد، در این صورت مرتبه گراف $\bar{G}$ کدام است؟

- ۲۱ (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴)

۴۵. یک گراف ساده از مرتبه ۱۱ دارای ۵۳ یال است. این گراف حداکثر چند رأس از درجه $\Delta = p - 1$ دارد؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۴۶. در گراف ساده G ، $p = ۱۲$ و $\Delta = ۵$ است. حداکثر مقدار q کدام است؟

- ۳۰ (۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴)





۴۷. در گراف ساده G ، $q = ۱۲$ و $\Delta = ۵$ است. حداقل مقدار p کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۸. در گراف ساده G ، $p = ۱۲$ و $\Delta = ۵$ است. حداقل مقدار q کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۶ (۴) ۵

۴۹. در گراف ساده G ، $q = ۱۲$ و $\Delta = ۵$ است. حداکثر مقدار p کدام است؟ (گراف رأس منفرد ندارد)

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۲ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۵۰. در گراف ساده G ، $p = ۱۲$ و $\delta = ۴$ است. حداقل مقدار q کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶

۵۱. در گراف ساده G ، $p = ۱۲$ و $\delta = ۴$ است. حداکثر مقدار q کدام است؟

- (۱) ۶۱ (۲) ۶۰ (۳) ۵۹ (۴) ۵۸





۵۲. در گراف ساده G ، $q = ۱۲$ و $\delta = ۴$ است. حداقل مقدار p کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۷

۵۳. در گراف ساده G ، $p = ۱۰$ و $\Delta = ۴$ است. چند مقدار متمایز برای q وجود دارد؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۱۷

۵۴. در گراف ساده G ، $q = ۱۰$ و $\delta = ۴$ است. چند مقدار متمایز برای p وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۵۵. گرافی ساده از مرتبه ۸ رئوسی از درجه ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ دارد. درجه رأس دیگر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶





۵۶. چند نوع گراف ۲- منتظم از مرتبه ۱۲ وجود دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۵۷. در گراف ساده G ، از مرتبه ۱۲، مجموع مینیمم و ماکزیمم درجه برابر ۱۸ است. حداقل اندازه گراف G کدام است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۴۳ (۳) ۴۴ (۴) ۴۵

۵۸. در گراف ساده G ، از مرتبه ۱۲، مجموع مینیمم و ماکزیمم درجه برابر ۱۸ است. حداکثر اندازه گراف G کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۵ (۳) ۶۲ (۴) ۶۳

۵۹. چند گراف ساده ناتهی وجود دارد به طوری که $q = \delta$ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۰. درگراف ساده G ، با اندازه ۲۵ و مینیمم و ماکزیمم درجه برابر ۹ و ۳ می باشد. چند مقدار متمایز برای p وجود دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۵





۶۱. در گراف ساده G ، از مرتبه ۱۹، درجه ۷ رأس برابر δ و بقیه رؤوس از درجه Δ می باشند. اگر $q(G) = 91$ باشد در این صورت Δ کدام می تواند باشد؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

۶۲. چند گراف ساده با اندازه ۲۶ و مرتبه ۸ وجود دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۶۳. گرافی ساده با اندازه ۱۰ و مرتبه ۱۰ موجود است. این گراف چند زیرگراف منتظم و مرتبه ۱۰ می تواند داشته باشد؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۶۴. در گرافی $q(G) = \frac{q(\bar{G})}{4}$ است. مرتبه گراف G کدام می تواند باشد؟

۱۲۵ (۴)

۱۳۲ (۳)

۱۱۷ (۲)

۱۰۹ (۱)





۶۵. چند گراف ۸- منتظم مرتبه ۱۱ وجود دارد؟

(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۷

(۱) ۶

۶۶. با اضافه کردن ۸ یال به گراف ساده ۵- منتظم مرتبه p ، گرافی کامل پدید می آید. تعداد دورهای به طول ۳ در گراف K_p کدام است؟

(۴) ۱۲۰

(۳) ۸۴

(۲) ۳۵

(۱) ۵۶

۶۷. گراف ساده G از مرتبه ۹ فقط دارای رئوس ۲ و ۷ است. اگر $q(G) = ۲۴$ باشد آن گاه اختلاف تعداد رئوس ۷ از تعداد رئوس ۲ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۶

۶۸. کدام گزینه می تواند مجموع مرتبه و اندازه یک گراف کامل باشد؟

(۴) ۹۰

(۳) ۱۰۵

(۲) ۱۲۴

(۱) ۶۰





۶۹. در گرافی کامل $p^2 = \delta^2 + 17$ می باشد. این گراف چند دور به طول ۳ دارد؟

۱۲۰ (۴)

۸۴ (۳)

۵۶ (۲)

۳۵ (۱)

۷۰. در گراف k -منتظم مرتبه ۱۲ داریم $q = 5k^2 - 8$. حاصل $k + \delta + \Delta + q$ کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۷۱. در گراف غیرتهی K_p داریم $\binom{p}{2} = \Delta(\Delta - 1)$. در این گراف چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۳ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۷۲. در گراف ساده G از مرتبه ۹، ماکزیمم و مینیمم درجه به ترتیب ۷ و ۱ می باشند. چند مقدار متمایز برای

q وجود دارد؟

۲۳ (۴)

۲۲ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)





۷۳. در گراف ساده G از مرتبه ۸، ماکزیمم و مینیمم درجه به ترتیب ۷ و ۲ می باشند. چند مقدار متمایز برای q وجود دارد؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

۷۴. G_1 گرافی ۲-منتظم از مرتبه ۹ و G_2 گرافی ۳-منتظم می باشد. هر رأس از G_1 را به همه رئوس گراف G_2 وصل می کنیم تا گرافی منتظم پدید آید. در این گراف حاصل $p + \Delta^2 - q$ کدام است؟

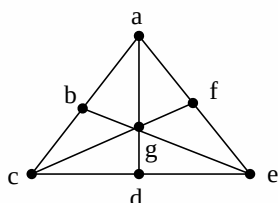
-۹ (۴)

-۱۵ (۳)

-۱۳ (۲)

-۱۱ (۱)

۷۵. گراف مقابل چند دور به طول ۳ دارد؟



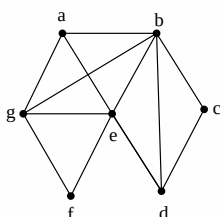
۷ (۱)

۶ (۲)

۵ (۳)

۸ (۴)

۷۶. در گراف مقابل چند دور به طول ۳ وجود دارد؟



۵ (۱)

۶ (۲)

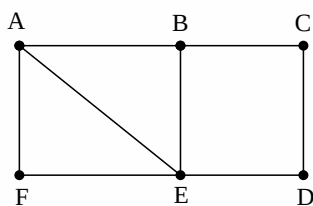
۸ (۳)

۷ (۴)





۷۷. در گراف روبه رو چند مسیر از رأس B به رأس F وجود دارد؟



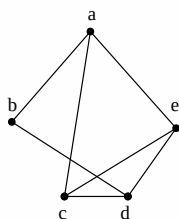
۸ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۵ (۴)

۷۸. در گراف شکل مقابل چند مسیر به طول ۳ از رأس a به رأس e وجود دارد؟



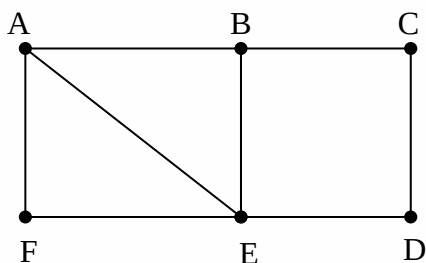
۴ (۲)

۵ (۱)

۲ (۴)

۳ (۳)

۷۹. در گراف روبه رو چند مسیر از رأس C به رأس F وجود دارد که شامل رأس E باشد؟



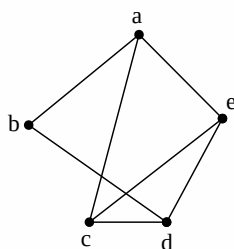
۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

۸۰. در گراف شکل مقابل چند مسیر از رأس a به رأس b وجود دارد؟



۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۶ (۴)





۸۱. در گراف کامل مرتبه ۸ چند مسیر به طول ۴ وجود دارد؟

۷۲۶۰ (۴)

۳۳۶۰ (۳)

۳۶۳۰ (۲)

۶۷۲۰ (۱)

۸۲. در گراف کامل مرتبه ۷ چند دور به طول ۵ وجود دارد؟

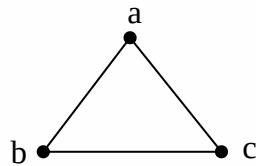
۵۰۴ (۴)

۲۵۲ (۳)

۱۲۶۰ (۲)

۲۵۲۰ (۱)

۸۳. در گراف مقابل چند مسیر وجود دارد؟



۸ (۲)

۹ (۱)

۶ (۴)

۷ (۳)

۸۴. گرافی با درجات (۵, ۵, ۲, ۲, ۲, ۲) چند دور دارد؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

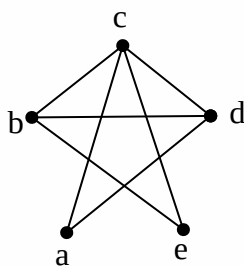
۱۱ (۲)

۱۰ (۱)





۸۵. در گراف روبه رو چند مسیر از a به b وجود دارد؟



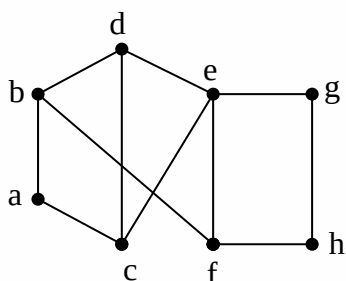
۳ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۵ (۴)

۸۶. در گراف روبه رو چند مسیر به طول ۴ از رأس a به رأس b وجود دارد که شامل رأس c باشد؟



۴ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۲ (۴)

۸۷. گرافی ساده با یک رأس درجه ۸ و نه رأس درجه ۲ چند دور دارد؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۸۸. در گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۱ چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۴ حداکثر ۳

۳ حداکثر ۲

۲ حداکثر ۱

۱ صفر





۸۹. در گرافی با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و درجات $(5, 5, 5, 5, 4, 4)$ ، چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

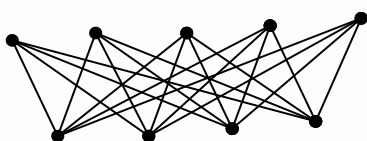
۲۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۱۸ (۱)

۹۰. در گراف روبه رو چند دور به طول ۴ وجود دارد؟



۱۲۰ (۱)

۶۰ (۲)

۳۰ (۳)

۹۰ (۴)

۹۱. اگر در گراف با درجات $(6, 5, 2, 2, 2, 2, 1)$ ، دو رأس با درجات ۶ و ۵ مجاور نباشند در این صورت چند دور به

طول ۳ یا ۴ در این گراف وجود دارد؟

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۹۲. اگر درجات گرافی به صورت $(6, 6, 6, 5, 4, 4, 3)$ باشد این گراف چند دور به طول ۳ شامل رأس ۵ دارد؟

۵ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)





۹۳. گرافی ۲- منتظم با اندازه ۱۹، حداکثر چند دور دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۹۴. گرافی منتظم با ۸ رأس و اندازه ۱۲ وجود دارد. کدام گزینه در مورد آن صحیح است؟

(۲) ناهمبند است.

(۱) همبند است.

(۴) حداقل یک دور به طول ۳ را دارا می باشد.

(۳) حداکثر ۸ دور به طول ۳ دارد.

۹۵. گراف ساده ای از مرتبه ۱۳ می باشد. اگر این گراف از ۶ بخش جدا از هم تشکیل شده باشد حداکثر دارای چند یال است؟

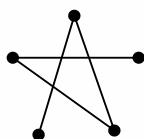
۳۶ (۴)

۲۸ (۳)

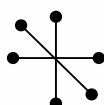
۲۱ (۲)

۲۴ (۱)

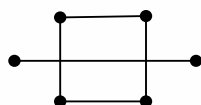
۹۶. کدام گراف همبند است؟



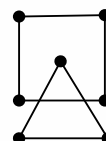
(۴)



(۳)



(۲)

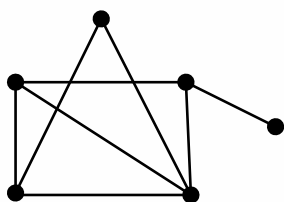


(۱)





۹۷. گراف شکل روبه رو چند دور به طول ۳ یا ۴ دارد؟



۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

۹۸. در گرافی ساده $p = 10$ و $q = 43$ می باشد. حداقل مقدار $\delta + \Delta$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

۹۹. اگر در گرافی ۶ رأسی، حاصل $\Delta - \delta$ کمترین مقدار باشد، در این صورت بیشترین اندازه این گراف کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

۱۰۰. درجات رئوس یک گراف ساده به صورت $(4, 3, 3, 2, 2, 2)$ است. این گراف دارای چند دور است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)





۱.۰۱. گراف همبند G مفروض است. اگر با حذف هر کدام از یال های آن، گراف ناهمبند شود، حاصلضرب مرتبه در اندازه این گراف کدام می تواند باشد؟

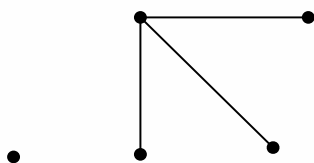
۷۰ (۴)

۳۵ (۳)

۲۱ (۲)

۴۲ (۱)

۱.۰۲. در مکمل گراف مقابل چند دور وجود دارد؟



۶ (۲)

۸ (۱)

۷ (۴)

۵ (۳)

۱.۰۳. گراف منتظم و ناهمبندی دارای ۷ رأس و ناتهی است. چند دور در این گراف وجود دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱.۰۴. گرافی ساده از مرتبه ۱۵ ناهمبند است. حداکثر اندازه این گراف کدام است؟

۷۸ (۴)

۹۱ (۳)

۱۰۵ (۲)

۹۲ (۱)





۱۰۵. گرافی ساده از مرتبه ۱۵ همبند است. اندازه این گراف کدام است؟

۹۲ (۴)

۶۰ (۳)

۴۶ (۲)

۱۴ (۱)

۱۰۶. در گرافی از مرتبه ۱۵ از هر رأس به رأس دیگر مسیری وجود دارد. حداقل اندازه این گراف کدام است؟

۲۶ (۴)

۲۱ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

۱۰۷. گرافی از مرتبه ۸ دقیقاً دو رأس درجه ۲ دارد. حداکثر تعداد یال های این گراف کدام است؟

۲۵ (۴)

۲۱ (۳)

۱۹ (۲)

۱۷ (۱)

۱۰۸. در گرافی ساده از مرتبه ۸ و اندازه ۲۵، حداکثر چند رأس از درجه ۷ وجود دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۰۹. کمترین و بیشترین تعداد رئوس درجه ۶ در گرافی ساده از مرتبه ۷ و اندازه ۱۸ به ترتیب کدام است؟

۴ و ۲ (۴)

۴ و ۱ (۳)

۳ و ۲ (۲)

۳ و ۱ (۱)





۱۱۰. در گرافی ساده با درجات $(5, 3, 3, 3, 3, 3)$ چند دور به طول ۴ یا ۵ وجود دارد؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۱۱۱. در گرافی با درجات $(5, 5, 4, 4, 4, 2)$ چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

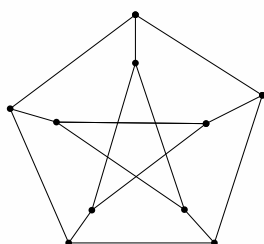
۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۱۱۲. گراف رو به رو چند دور به طول ۶ دارد؟



۹ (۱)

۱۰ (۲)

۱۱ (۳)

۱۲ (۴)

۱۱۳. در گرافی از مرتبه ۶ بین دو رأس مشخص a و b فقط یک مسیر به طول ۵ وجود دارد. چند مسیر در این گراف وجود دارد؟

۲۴ (۴)

۲۱ (۳)

۱۵ (۲)

۱۸ (۱)





۱۱۴. گرافی همبند از مرتبه ۱۰ و با اندازه ۱۰ دارای چند دور است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱۵. در گرافی ساده بادرجات $(5, 4, 2, 2, 2, 2, 1)$ دو رأس با درجه بزرگ تر مجاور نیستند. در این گراف چند دور

به طول ۴ وجود دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۱۶. تعداد مسیرهای به طول حداقل ۲ در P_8 کدام است؟

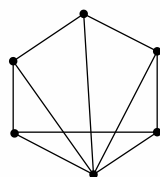
۲۱ (۲)

۱۸ (۱)

۲۴ (۴)

۲۸ (۳)

۱۱۷. در گراف روبه رو چند دور به طول ۵ یا ۶ وجود دارد؟



۱۰ (۲)

۹ (۱)

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۱۸. در یک گراف کامل، حاصل ضرب اندازه و مرتبه آن ۵۰ می باشد. در این گراف چند دور

به طول ۴ وجود دارد؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)





۱۱۹. گراف همبند G فاقد دور است. مجموع مرتبه و اندازه آن کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۱۲۰. در گراف G با درجات $(۳, ۳, ۲, ۲, ۲)$ دو رأس با ماکسیمم درجه غیرمجاورند. تعداد دورهای به

(سراسری ریاضی ۸۱)

طول ۴ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲۱. گرافی دارای ۸ رأس و ۲۳ یال است. بیشترین مقدار $\delta - \Delta$ کدام است؟

(آزاد ریاضی ۸۱)

- (۱) ۵ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۲۲. گرافی با درجات $(۴, ۴, ۴, ۴, ۴)$ دارای چند یال است؟

(آزاد ریاضی ۸۲)

- (۱) ۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۱۰





۱۲۳. درجات رئوس گراف همبند G به صورت $(a, b, 5, 4, 3, 2)$ است، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۳)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آزاد ریاضی ۸۳)

۱۲۴. گرافی با ۶ رأس دارای ۱۴ یال است. درجه چند رأس از این گراف ۵ است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

(آزاد ریاضی ۸۴)

۱۲۵. در گرافی با رئوس a, b, c, d, e و درجه رئوس $(4, 4, 4, 3, 3)$ چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

(آزاد ریاضی ۸۵)

۱۲۶. در گرافی $p = 10$ و دارای دو رأس درجه ۵ است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۳۷ (۴)

۴۵ (۳)

۳۸ (۲)

۴۱ (۱)





۱۲۷. در گرافی تعداد رئوس $p = ۱۰$ و تعداد یال ها $q = ۳۱$ است. حداکثر چند رأس با درجه ۹ می توان داشت؟
(آزاد ریاضی ۸۵)

۴ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

۱۲۸. در گرافی $p = ۲۰$ و $q = ۲۰$ است. حداکثر چند رأس با درجه یک می توانیم داشته باشیم؟
(آزاد ریاضی ۸۶)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۷ (۱)

۱۲۹. در یک گراف کامل از مرتبه ۵ چند دور به طول ۴ وجود دارد؟
(سراسری ریاضی ۸۷)

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۱۳۰. در گراف $p = ۲۰$ و $q = ۱۷$ است. حداکثر چند رأس درجه صفر می توانیم داشته باشیم؟
(آزاد ریاضی ۸۷)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

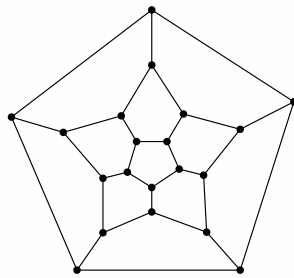
۱۴ (۲)

۱۳ (۱)





(فارج ریاضی ۱۸)

۱۳۱. گراف مقابل دوری با طول m دارد. بزرگ ترین عدد m کدام است؟

۱۸ (۱)

۱۹ (۲)

۲۰ (۳)

۲۱ (۴)

(آزاد ریاضی ۱۸)

۱۳۲. گرافی با ۴۵ رأس درجه ۲ حداکثر چند دور به طول ۴ دارد؟

۱۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱ (۲)

۱۱ (۱)

(آزاد ریاضی ۱۸)

۱۳۳. در گرافی $p = ۱۰$ و $q = ۴۲$ است. حداکثر چند رأس با درجه ۸ وجود دارد؟

۳ (۴)

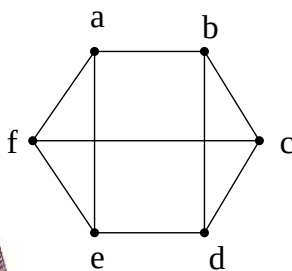
۶ (۳)

۷ (۲)

۴ (۱)

(فارج ریاضی ۱۹)

۱۳۴. در گراف ۳-منتظم مقابل چند دور به طول ۵ وجود دارد؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)





۱۳۵. در یک گراف ناهمبند ساده با $p = ۱۳$ و $q = ۶۵$ چند رأس با درجه ۱۱ وجود دارد؟ (آزاد ریاضی ۱۹)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

۱۳۶. در یک گراف همبند ساده با $p = ۶$ و $q = ۵$ حداکثر چند رأس درجه ۲ وجود دارد؟ (آزاد ریاضی ۱۹)

۱ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۱۳۷. در یک گراف ساده با درجه رئوس ۴, ۴, ۳, ۳, ۲, ۲ که دو رأس با مینیمم درجه مجاورند، تعداد دورهای با طول ۶ کدام است؟ (فارج ریاضی ۹۰)

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۳۸. در گرافی با $p = ۱۰$ و $q = ۲۵$ حداکثر چند رأس با درجه ۹ وجود دارد؟ (آزاد ریاضی ۹۰)

۵ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)





۱۳۹. در گرافی با $p = ۴۶$ همه رئوس درجه ۲ می باشند. این گراف حداکثر چند دور به طول ۴ دارد؟

(آزاد ریاضی ۹۰)

۱۵ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۱۱ (۱)

۱۴۰. در یک گراف همبند که مجموع مرتبه و اندازه آن ۸ می باشد، با افزودن چند یال گراف کامل می شود؟

(سراسری ریاضی ۹۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴۱. گراف شکل مقابل چند دور با طول ۵ دارد؟

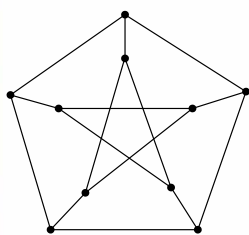
(فارج ریاضی ۹۱)

۷ (۱)

۸ (۲)

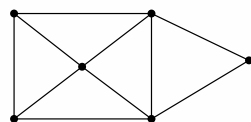
۹ (۳)

۱۲ (۴)





۱۴۲. در گراف ساده زیر حاصل $\frac{\Delta^3 - \delta^3}{\delta} + 208 + 5p^2 - 5q^2$ چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۹۱)



۱۷ (۲)

۷- (۱)

۱ (۴)

صفر (۳)

۱۴۳. در یک گراف با $p = 12$ و $q = 62$ ، حداکثر چند رأس با درجه ۱۰ می‌توانیم داشته باشیم؟ (آزاد ریاضی ۹۱)

۲ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۸ (۱)

۱۴۴. درجه رأس‌های یک گراف ساده و همبند اعداد $a, b, c, 1, 3, 4$ هستند. اگر p تعداد رأس‌های گراف، q

تعداد یال‌های گراف و $q = \frac{3}{2}p$ باشد، تعداد جواب‌های مجموعه $\{a, b, c\}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)





فصل دوم: گراف

(فارج ریاضی ۹۳)

۱۴۵. چند نوع گراف ساده و همبند وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه آن ۹ باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(سراسری ریاضی ۹۴)

۱۴۶. در یک گراف کامل از مرتبه ۵ چند دور با طول ۵ وجود دارد؟

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

(فارج ریاضی ۹۵)

۱۴۷. در گرافی با درجه رأس های (۱, ۲, ۳, ۴, ۴, ۴, ۴) تعداد دورهای با طول ۵ کدام است؟

صفر (۴)

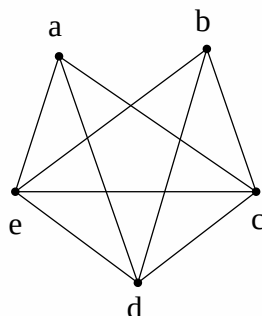
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(فارج ریاضی ۹۶)

۱۴۸. در گراف کامل از مرتبه ۵ یال ab حذف شده است. چند دور به طول ۴ در این گراف موجود است؟



۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)





۱۴۹. درجات رئوس یک گراف به صورت $(3, 3, 3, 2, 1)$ می باشد. چند مسیر متمایز بین دو رأس با درجات ۱ و ۲ وجود دارد؟
(سراسری ریاضی ۹۷)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۵۰. چند نوع گراف ساده همبند فاقد دور می توان یافت که مجموع مرتبه و اندازه آن ۱۱ باشد؟
(فارج ریاضی ۹۷)

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۵۱. اگر درجه راس های یک گراف $2, 2, 2, 4, 4$ و ۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود کدام است؟
(سراسری ریاضی ۹۹)

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۱۵۲. در یک گراف ۵ راسی K - منتظم با بیشترین مقدار ممکن K ، تعداد دورها با طول ۴، کدام است؟
(فارج ریاضی ۹۹)

۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)





(سراسری ریاضی ۹۸)

۱۵۳. یک گراف ساده ۶ راسی ۴- منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

(فارج ریاضی ۹۸)

۱۵۴. در یک گراف با درجه راس های ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۵ تعداد دورها با طول ۳ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

(سراسری ریاضی ۹۹)

۱۵۵. در یک گراف ۷ راسی غیر تهی و غیر کامل K - منتظم، K چند عدد می تواند اختیار کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(فارج ریاضی ۹۹)

۱۵۶. درجه راس های یک گراف ۵، ۴، ۴، ۳، ۳ و ۱ است. چند دور با طول ۴ موجود است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)





۱۵۷. کوچکترین اندازه گراف ساده همبند از مرتبه ۷ که بزرگترین درجه رئوس آن ۳ باشد، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۵۸. در یک گراف کامل $q(G) = \Delta^2(G) - 2\delta(G)$ است. مقدار $p(G)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۵۹. گراف G با ۹ راس، غیر تهی، غیر کامل و K -منتظم است. بیشترین مقدار K ، کدام است؟ (فارج ریاضی ۱۴۰۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۱۶۰. در گراف G ، مجموعه همسایگی باز هر راس دارای ۲ عضو است. اگر $q(\bar{G}) = 3q(G)$ باشد، مقدار $p(G)$ کدام است؟ (فارج ریاضی ۱۴۰۱)

(فارج ریاضی ۱۴۰۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)





۱۶۱. در گراف G ، مجموعه همسایگی بسته هر راس دارای ۴ عضو است. اگر $p(G) = ۶$ باشد، مقدار $q(G)$ چقدر است؟
(فارج ریاضی ۱۴۰۱)

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

۱۵ (۲)

۹ (۱)

۱۶۲. در گراف با درجه راس های ۳،۳،۳،۳،۱،۱ دو راس با کمترین درجه، غیرمجاورند. تعداد دورها به طول ۳ کدام است؟
(فارج ریاضی ۱۴۰۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۶۳. اگر درجه دو راس از یک گراف ساده همبند و فاقد دور با مرتبه ۸، برابر ۳ و ۵ باشد، تعداد رئوس با درجه ۲ از گراف مورد نظر، کدام است؟
(فارج ریاضی ۱۴۰۰)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)





۱۶۴. درجه راس های یک گراف ساده و همبند به صورت اعداد a و b و c و ۳ و ۴ و ۵ هستند. اگر تعداد یال های این گراف $۱/۵$ برابر $(a + b + c)$ باشد، چند حالت مختلف برای مجموعه $\{a, b, c\}$ وجود دارد؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۶۵. اگر در گراف ساده G ، $|V(G)| = ۱۸$ ، $\Delta(G) = ۸$ ، $\delta(G) = ۳$ باشند، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای اندازه گراف G کدام است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

۳۷ (۴)

۳۹ (۳)

۳۸ (۲)

۴۰ (۱)

۱۶۶. حاصل ضرب درجه رأس های گراف G ، ۴۸ است. اگر تعداد راس ها با درجه راس یک حداقل باشد، حاصل $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

۱۳ (۴)

۱۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۷ (۱)

۱۶۷. حاصل ضرب درجه رأس های گراف G برابر ۴۳۲ است. اگر گراف G با حداقل تعداد یال رسم شود، حاصل $\delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

(فارج ریاضی ۱۴۰۲)

۲۳ (۴)

۲۱ (۳)

۲۹ (۲)

۳۱ (۱)





خلاصه برداری نکات مهم درس





خلاصه برداری نکات مهم درس





خلاصه برداری نکات مهم درس





خلاصه برداری نکات مهم درس





درس دوم: مدلسازی با گراف

نظریه گراف منبع ارزشمندی برای حل مسائل می‌باشد که به کمک آن می‌توانیم استراتژی‌های مختلف زیادی را تجربه کرده و افراد را به تفکر خلاق سوق دهیم. افراد به کمک مدل سازی گراف ها قادر خواهند بود مسائل را حل کرده و مدل

×			×			×	
	×		×		×		
		×	×	×			
×	×	×	●	×	×	×	×
		×	×	×			
	×		×		×		
×			×			×	
			×				×

گرافیکی آن ها را نمایش دهند. به طور مثال بسیاری از علوم کامپیوتر که با پیچیدگی محاسبات سروکار دارند را می‌توان به مسائل نظریه گراف تبدیل کرد. در سال های اخیر، مفهوم احاطه‌گری در گراف ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه های مختلف همچون علوم کامپیوتری و شبکه های الکترونیکی

مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و رشد چشمگیری داشته است.

یکی از مباحثی که امروزه بسیار مورد توجه قرار گرفته است، احاطه‌گری در گراف می‌باشد. به نظر می‌رسد که منشأ مفهوم احاطه‌گری بازی شطرنج می‌باشد که در آن نظر بر این است که صفحه شطرنج با مهره های شطرنج احاطه (پوشیده) شود.

						●	
		●					
							●
			●				
●							

می‌دانیم طبق قوانین بازی شطرنج، وزیر قادر است در جهت عمودی، افقی و مورب به تعداد دلخواه حرکت کند بنابراین طبق شکل مقابل وزیر می‌تواند در حرکت بعدی در هر یک از خانه هایی که با علامت X مشخص شده اند، قرار گیرد.

در حقیقت این وزیر همه خانه های مشخص شده را تهدید و به عبارت دیگر همه این خانه ها را احاطه می‌کند. در قرن نوزدهم میلادی علاقه مندان به شطرنج در اروپا سعی کردند تا حداقل تعداد وزیر مورد نیاز برای پوشش یک صفحه شطرنج را تعیین کنند که بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه گراف ها بررسی و مطالعه گردید و تا کنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است. در همان سال های اولیه به درستی تصور می‌شد که حداقل تعداد وزیرهای لازم برای احاطه کردن همه خانه های یک صفحه ۸ در ۸ شطرنج، پنج تاست که شکل مقابل چگونگی قرار گرفتن این ۵ وزیر را

نشان می‌دهد.





۱. حداقل چند مهره وزیر در یک صفحه شطرنج 4×4 قرار دهیم به طوری که تمام خانه ها پوشش داده شود؟

	♣	♣	

پاسخ: بدیهی است که یک وزیر به تنهایی نمی تواند همه ۱۶ خانه را مورد تهدید قرار دهد بنابراین حداقل به ۲ وزیر برای پوشش هر ۱۶ خانه نیاز داریم.

۲. حداقل چند مهره شاه در یک صفحه شطرنجی 6×6 قرار دهیم به طوری که تمام خانه ها پوشش داده

شود؟ (مهره شاه هر خانه ای که مرز مشترک با خانه ای که در آن قرار دارد را تهدید می کند.)

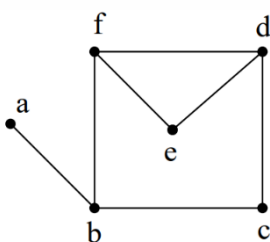
	♣			♣	
	♣			♣	

پاسخ: بدیهی است هر مهره شاه حداقل ۳ تا ۵ خانه را پوشش می دهد. از آن بایی که که صفحه مورد نظر دارای ۳۶ خانه است پس حداقل به ۱۲ مهره شاه برای پوشش همه خانه ها نیاز داریم.

مجموعه احاطه گر

مجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه گر می گوئیم هرگاه هر رأس گراف G ($v_i \in V(G)$) یا در

D باشد یا حداقل با عضوی از D مجاور باشد.



مثال: در گراف مقابل مجموعه های $\{a, c, e\}$ و $\{b, d\}$ و همگی مجموعه های احاطه گر می باشند.





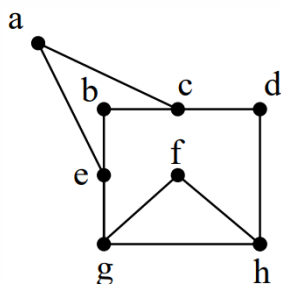
۳. در گراف شکل مقابل، کدام مجموعه یک مجموعه احاطه گر نیست؟

(۱) $\{c, g\}$

(۲) $\{f, h, g, a\}$

(۳) $\{g, e, d\}$

(۴) $\{b, c, d, f\}$



پاسخ گزینه ۱ درست است.

رأس b نه در مجموعه $\{f, h, g, a\}$ می باشد و نه با هیچ کدام از آن ها مجاور است بنابراین این مجموعه نمی تواند احاطه گر باشد.

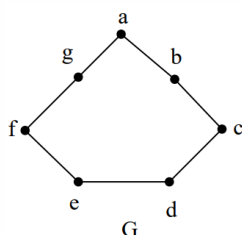
مجموعه احاطه گر مینیمم و عدد احاطه گری

در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر مینیمم نامیده می شوند و تعداد اعضای چنین مجموعه یا مجموعه هایی را عدد احاطه گری گراف G می گوئیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می دهیم.

تذکر: گاهی مواقع برای راحتی به یک مجموعه احاطه گر مینیمم از گراف G ، یک γ - مجموعه می گوئیم.

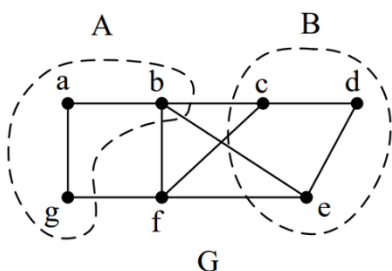
مثال: برای گراف C_7 شکل مقابل، مجموعه $\{a, c, e, g\}$ یک مجموعه احاطه گر و مجموعه های $\{a, d, g\}$ و $\{a, b, e\}$ دو

مجموعه احاطه گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γ - مجموعه می باشند. پس $\gamma(G) = 3$.



۴. برای گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه گر مینیمم بیابید.

پاسخ: برای احاطه کردن رأس d از مجموعه B (مجموعه رأس d و همسایه هایش) حداقل باید یک عضو انتخاب شود زیرا در غیر این صورت



رأس d مورد پوشش قرار نمی گیرد. از طرفی برای آن که رأس a نیز مورد پوشش قرار بگیرد

از مجموعه A حداقل باید یک عضو انتخاب شود همچنین می بینیم که با هیچ دو عضوی از

مجموعه های A و B نمی توان گراف را احاطه کرد پس $\gamma(G) \geq 3$. مجموعه $\{b, d, g\}$ نیز

یک احاطه گر برای گراف G می باشد بنابراین $\gamma(G) = 3$ است و مجموعه مذکور یک

احاطه گر مینیمم برای گراف G می باشد.

۵. فرض کنید در یک شهرستان ۸ دبیرستان وجود دارد که با جاده هایی به یکدیگر متصل شده اند. شکل

زیر نشان می دهد که کدام دبیرستان ها با جاده ای به هم متصل هستند و حرف Y نشان دهنده این است

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		Y	Y		Y			
B	Y			Y		Y		
C	Y			Y	Y			Y
D		Y	Y					
E	Y		Y			Y		Y
F		Y			Y		Y	
G						Y		Y
H			Y		Y		Y	

که فاصله دو دبیرستان کمتر از ۵ کیلومتر است.

انجمن آموزش و پرورش در این شهرستان در نظر دارد امنیت

دبیرستان ها را ارتقا دهد به طوری که هر دبیرستان دارای یک

ایستگاه امنیتی باشد و یا پنج کیلومتر تا دبیرستان دارای

ایستگاه امنیتی فاصله داشته باشد به طوری که اگر فوریتی پیش

آمد، ایستگاه امنیتی بتواند به سرعت به صحنه بیاید. با توجه به محدودیت های بودجه شهرستان، کمترین

تعداد لازم این ایستگاه ها قرار است مستقر شوند.

الف) چه تعداد ایستگاه و در کدام دبیرستان ها بایستی استقرار یابند؟

ب) با فرض اینکه دبیرستان B که بزرگ ترین دبیرستان شهر است دارای یک ایستگاه قدیمی می باشد، در کدام دبیرستان ها

بایستی ایستگاه جدید مستقر شود؟

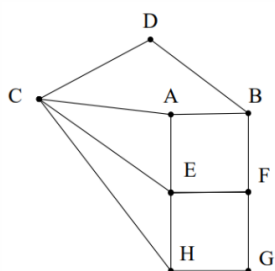




پاسخ: برای مدل سازی این مسئله کافیت گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و

سپس دو رأس را به هم متصل کنیم اگر و تنها اگر دبیرستان‌های مورد نظر به فاصله‌ای کمتر از ۵ کیلومتر از

یکدیگر قرار داشته باشند.



الف) باید یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف مقابل بیابیم. مجموعه احاطه‌گر $\{C, F\}$ گراف حاصل را احاطه

می‌کند بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ است. از طرفی برای اثبات این که $\gamma(G) \neq 1$ کافیت نشان دهیم یک

رأس نمی‌تواند گراف را احاطه کند زیرا در گراف رأسی وجود ندارد که با تمام رؤوس دیگر مجاور باشد بنابراین نتیجه می‌گیریم $\gamma(G) = 2$.

ب) باید مجموعه احاطه‌گر مینیممی را بیابیم که رأس B در آن باشد. داریم: $\{B\} \cup N(B) = \{B\} \cup \{A, D, F\} = \{A, B, D, F\}$

از مجموعه بالا حداقل یکی از رؤوس باید در مجموعه احاطه‌گر باشد و از آن جایی که رأس B حضور دارد کافیت در رأس دیگر، رأسی را

انتخاب کنیم که با رأس دیگر مجاور باشد که می‌توان رأس H را در مجموعه احاطه‌گر قرار داد. پس دومین مجموعه احاطه‌گر مینیمم، $\{B, H\}$

می‌باشد.

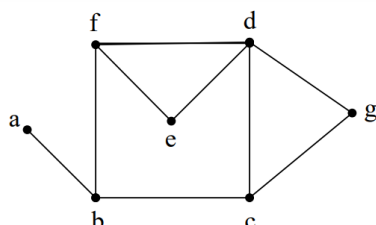
نکته: اگر در گرافی، رأسی با تمام رؤوس دیگر مجاور باشد در این صورت $\gamma(G) = 1$ است.

مجموعه احاطه‌گر مینیمال

یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌گوییم.

تذکر: هر مجموعه احاطه‌گر مینیممی، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

مثال: در گراف مقابل مجموعه $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است ولی مجموعه $\{b, d, g\}$ یک مجموعه



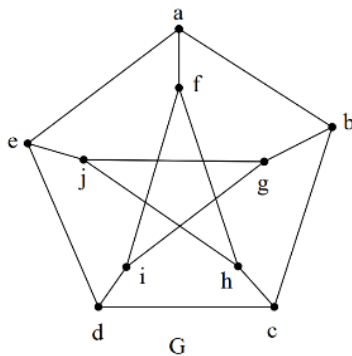
احاطه‌گر غیرمینیمال است زیرا با حذف رأس g باز هم احاطه‌گر می‌باشد.





۶. با توجه به گراف مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) کدام یک از مجموعه‌های $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{f, g, h, i, j\}$, $C = \{a, b, j, h, g\}$, $D = \{a, i, h\}$



$E = \{f, g, h, e, d\}$ و $F = \{f, g, h, e\}$ احاطه‌گری برای گراف بالاست؟

ب) کدام یک از مجموعه‌های قسمت «الف» غیرمینیمال می‌باشند؟

ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم بنویسید.

د) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بنویسید که مینیمم نباشد.

ه) چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟

۷. آیا می‌توان هر مجموعه احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف رئوسش به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال

تبدیل کرد؟

پاسخ: بله — زیرا حداقل یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال وجود دارد که زیر مجموعه دلخواه احاطه‌گر غیرمینیمال می‌باشد بنابراین با حذف

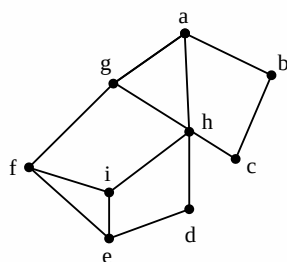
برخی از رئوس یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال می‌توان آن را به یک احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد. توجه داشته باشید که هر مجموعه

احاطه‌گر مینیممی، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.





۸. در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به

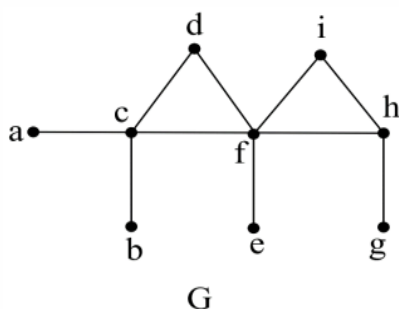


یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.

پاسخ: مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعه احاطه گر است. از آن جایی که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه گر نخواهد بود، بنابراین احاطه گر مینیمال نیست. اکنون با حذف سه رأس e, c, a از آن، مجموعه $\{b, d, f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه گر است اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه گر نخواهد بود بنابراین احاطه گر مینیمال است.



۹. در گراف شکل مقابل:



(الف) مجموعه ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر باشد.

(ب) مجموعه ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر مینیمال باشد.

(ج) یک مجموعه احاطه گر ۳ عضوی مشخص نمایید.

(د) آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس g, e, b را احاطه کند؟

(ه) $\gamma(G)$ چند است؟

(و) مجموعه‌های احاطه گر مینیمال ۵ عضوی و ۶ عضوی بنویسید.





۱۰. گراف C_6 چند مجموعه احاطه گر مینیمم و چند مجموعه احاطه گر غیرمینیمال ۳ عضوی دارد؟

(۱) ۱۳-۳ (۲) ۱۴-۴

(۳) ۱۲-۳ (۴) ۱۳-۴

۱۱. گراف های C_5 و C_6 به ترتیب چند احاطه گر ۳ عضوی دارند؟

(۱) ۱۵-۱۰ (۲) ۱۴-۱۰

(۳) ۱۵-۹ (۴) ۱۴-۹

کران پایین عدد احاطه گری

با مفهوم جزء صحیح یک عدد (کف یک عدد) آشنا هستیم و می دانیم:

$$[X] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$





گاهی مواقع کف X (جزء صحیح X) را به صورت $\lfloor X \rfloor$ هم نمایش می دهند. به طور مثال $\lfloor 3/5 \rfloor = 3$ ، $\lfloor -4/2 \rfloor = -5$ ، $\lfloor \sqrt{20} \rfloor = 4$ ، در صورتی که X یک عدد حقیقی باشد، سقف X به صورت زیر می باشد:

$$\lceil X \rceil = \begin{cases} X & X \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک ترین عدد صحیح بزرگ تر از } X & X \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

به طور مثال $\lceil 4 \rceil = 4$ ، $\lceil 3/2 \rceil = 2$ ، $\lceil -6/2 \rceil = -6$ ، $\lceil \sqrt{30} \rceil = 6$ ، $\lceil 5 \rceil = 5$.

فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت بخواهند با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر بتوانند در یک تاکسی قرار گیرند. در این صورت:

الف: اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد به چند تاکسی نیاز دارند؟ طبیعتاً $\frac{16}{4} = 4$ تاکسی نیاز است.

ب: اگر تعداد کارمندان ۱۷ نفر باشد به چند تاکسی نیاز دارند؟ در این صورت باید سقف $\frac{17}{4}$ را در نظر گرفت زیرا ۱۷ نفر حداقل به ۵ تاکسی نیاز دارند. $\left\lceil \frac{17}{4} \right\rceil = 5$

در یک گراف ساده G می دانیم که هر رأس v ، حداکثر $\deg(v) + 1$ رأس را می تواند احاطه کند. پس در یک گراف حداقل باید $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ رأس انتخاب شود تا بتوانیم تمام رؤس گراف را احاطه کنیم زیرا در عادلانه ترین حالت ممکن گراف منتظم است و همه رؤس از درجه Δ می باشند و هر رأس می تواند $(\Delta + 1)$ رأس در گراف را احاطه کند. بنابراین $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

سؤال مهم: $\gamma(G)$ حداکثر چند می تواند باشد؟ در بدبینانه ترین حالت ممکن، گراف می تواند ۱ رأس درجه Δ و $n - \Delta - 1$ رأس درجه ۱ و $n - \Delta - 1$ رأس ایزوله داشته باشد که در این صورت باید حداقل $(n - \Delta)$ رأس انتخاب شود تا بتوانیم تمام رؤس گراف را احاطه کنیم. بنابراین $\gamma(G) \leq n - \Delta$ است.

نکته: در یک گراف ساده G از مرتبه n با ماکزیمم درجه Δ داریم: $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta$





نکته: در صورتی که در گراف G از مرتبه n دنباله درجیات به صورت $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ باشد به طوری که $d_i \geq d_{i+1}$ باشد در این صورت داریم:

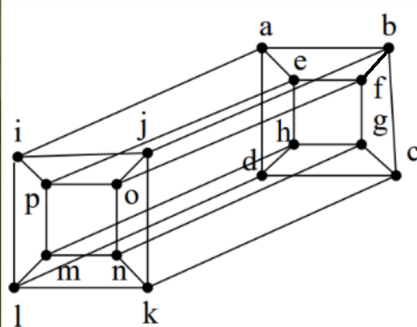
$$\gamma(G) \geq \min\{k | k + (d_1 + d_2 + \dots + d_k) \geq n\}$$

زیرا k تعداد رئوس انتخابی و d_1 تا d_k نیز درجات این k رأس یا همان تعداد همسایه هایی که می توانند احاطه کنند، می باشند. پس در صورتی که این مقدار از n بیشتر شود می توان آن را کران پایین عدد احاطه گری در نظر گرفت.

نکته: در صورتی که گراف G دارای رأس ایزوله نباشد یا به عبارتی $\delta \geq 1$ باشد در این صورت $\gamma(G) \leq \frac{n}{\delta}$ است.

بدیهی است زیرا در بدترین حالت گراف 1 -منتظم مرتبه n (زوج) است و با انتخاب هر رأس عملاً یک رأس دیگر را می توان احاطه کرد. بنابراین در صورتی که $\delta \geq 1$ باشد می توان $\frac{n}{\delta}$ را کران بالای عدد احاطه گری در نظر گرفت.

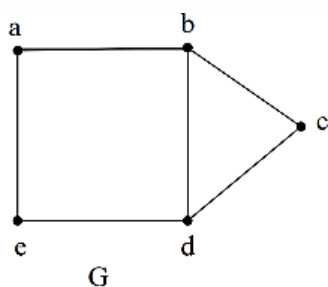
۱۲. یک شبکه رایانه ای متشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل زیر به چند کامپیوتر دیگر متصل است. گراف مقابل یک مدل سازی از شبکه موردنظر است که در آن هر رأس



نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط اند. می خواهیم مجموعه ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس ها) انتخاب کنیم. به طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این

شبکه وصل باشیم. مجموعه انتخاب شده از رئوس برای گراف موردنظر چه نوع مجموعه ای است؟



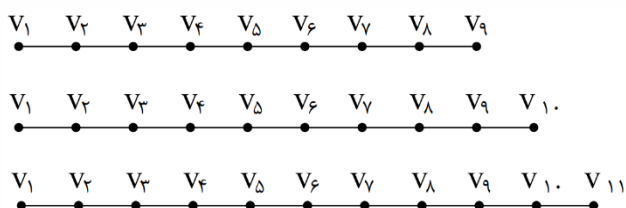


۱۳. با توجه به گراف مقابل:

الف) عدد احاطه‌گری آن را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

ب) تمام γ - مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G را بنویسید.

۱۴. عدد احاطه‌گری گراف‌های P_9 و P_{10} و P_{11} را بیابید.

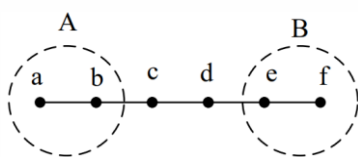


نکته: در گراف P_n عدد احاطه‌گری برابر $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است. اگر n مضرب ۳ باشد در این صورت γ - مجموعه یکتا می‌باشد.

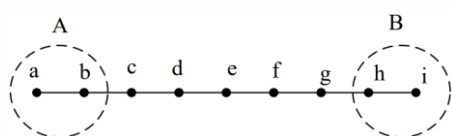
مثال: برای P_6 ، تنها مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم، مجموعه‌های رئوس توپر مقابل می‌باشد.



زیرا در گراف P_6 می‌دانیم که $\gamma(P_6) = 2$ است. پس فقط با ۲ رأس باید تمام ۶ رأس را احاطه کرد. از طرفی می‌دانیم از بین مجموعه‌های A و B حداقل یک رأس باید انتخاب گردد. بنابراین تنها مجموعه ممکن، مجموعه $\{b, e\}$ می‌باشند.



مثال: برای گراف P_9 نیز از آن جایی $\gamma(P_9) = 3$ ، پس باید با ۳ رأس گراف P_9 را احاطه کرد به طوری که از مجموعه‌های A و B حداقل یک رأس انتخاب شوند. اگر D مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد، چهار حالت وجود دارد که عبارتند از:



① $a, i \in D$: که در این صورت با هیچ رأس سومی نمی‌توان P_9 را احاطه کرد.

② $a, h \in D$: که در این صورت با هیچ رأس سومی نمی‌توان P_9 را احاطه کرد.

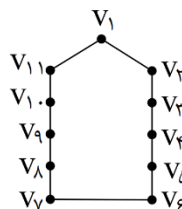
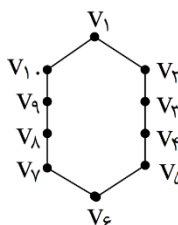
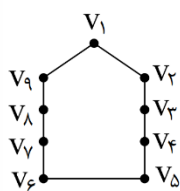
③ $b, i \in D$: که در این صورت با هیچ رأس سومی نمی‌توان P_9 را احاطه کرد.

④ $b, h \in D$: که در این صورت فقط با انتخاب رأس e می‌توان P_9 را احاطه کرد.



پس در کل فقط یک حالت به صورت مقابل وجود دارد.

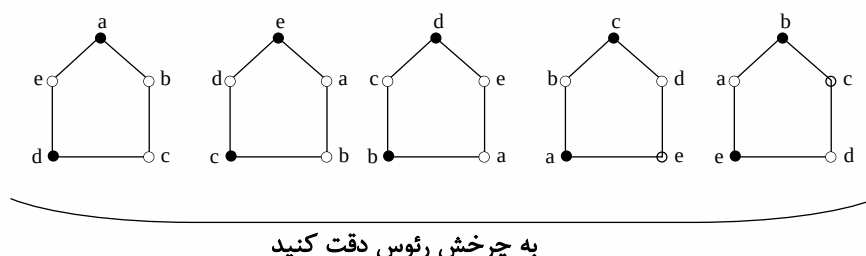
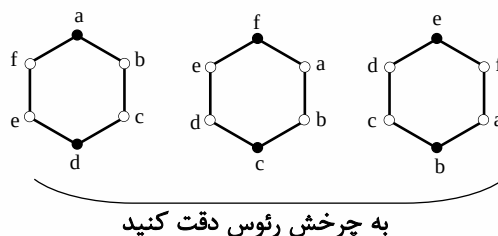
۱۵. عدد احاطه‌گری گراف‌های C_9 ، C_{10} و C_{11} را بیابید.



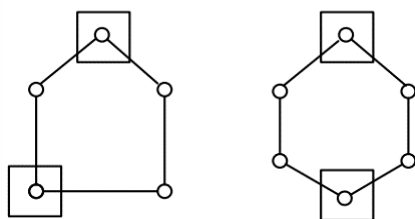


نکته: در گراف C_n عدد احاطه‌گری برابر $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است. اگر $n = 3k$ باشد در این صورت تعداد γ -مجموعه ها برابر ۳ تا است و اگر $n = 3k + 2$ باشد در این صورت تعداد γ -مجموعه ها برابر با n تا است.

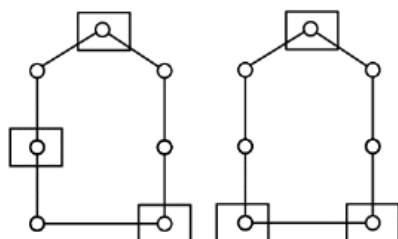
به طور مثال برای C_6 ، ۳ مجموعه احاطه‌گر مینیمم، مجموعه رئوس توپر در گراف های سمت چپ زیر می‌باشند و برای C_5 ، ۵ مجموعه احاطه‌گر مینیمم، مجموعه رئوس توپر در گراف های سمت راست زیر است.



به عبارت بهتر رئوس انتخابی را از قبل مشخص می‌کنیم و فقط گراف را می‌چرخانیم تا مجموعه‌های مختلف به وجود آید. به طور مثال برای C_5 و C_6 فقط به یک حالت می‌توان γ -مجموعه انتخاب کرد و آن هم به صورت های مقابل می‌باشند.



هر حالت دیگری برای γ -مجموعه ها در نظر بگیرید یکرخت با همین حالت ها می‌باشند. اما برای C_7 ، به دو حالت مقابل می‌توان γ -مجموعه انتخاب کرد.



برای C_8 و C_9 هم فقط یک حالت انتخاب وجود دارد.

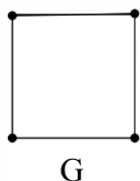




۱۶. گرافی مشخص کنید که:

(ب) برای آن عدد احاطه‌گری برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.

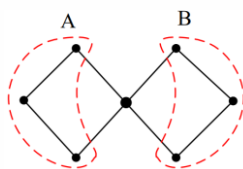
(الف) برای آن عدد احاطه‌گری برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.



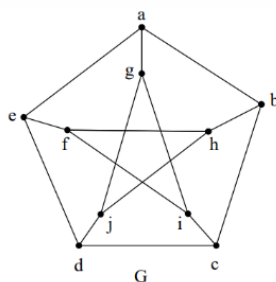
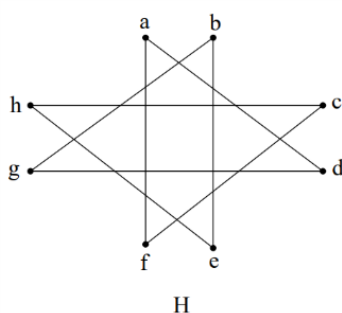
پاسخ: (الف) برای گراف مقابل $\gamma(G) = \left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil = 2$ است.

(ب) برای گراف مقابل $\gamma(G) = 3$ در حالی که $\left\lceil \frac{7}{5} \right\rceil = 2$ است. زیرا از بین مجموعه‌های A و B حداقل باید یک رأس انتخاب گردد و

از طرفی ملاحظه می‌کنیم با هیچ دو رأسی نمی‌توان گراف را احاطه کرد.



۱۷. عدد احاطه‌گری گراف‌های G و H به ترتیب کدام است؟



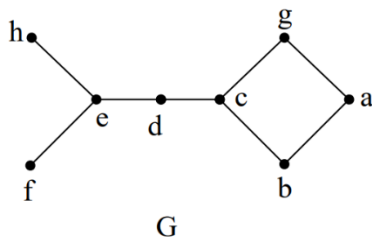
(۱) ۴-۴

(۲) ۳-۴

(۳) ۴-۳

(۴) ۳-۳

۱۸. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

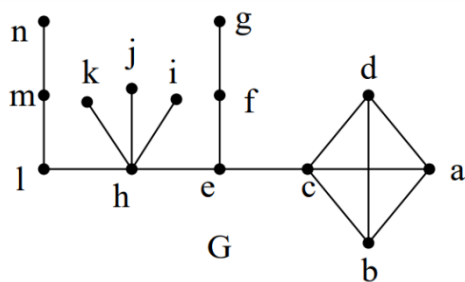
(۳) ۴

(۴) ۵





۱۹. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

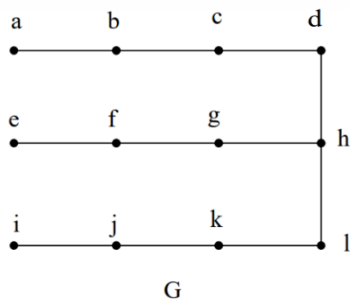


۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



۲۰. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

۲۱. عدد احاطه‌گری $\bar{C}_5$ و $\bar{P}_6$ را به دست آورید.

۲۲. عدد احاطه‌گری گراف ۲- منتظم مرتبه‌ی ۹ چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟





۲۳. عدد احاطه‌گری گراف ۲- منتظم مرتبه‌ی ۱۰ چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

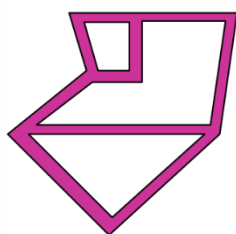
۲۴. عدد احاطه‌گری گراف ۲- منتظم مرتبه‌ی ۱۱ چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟





پرسش های تشریحی

۱. شکل مقابل نقشه منطقه ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع های این شهر دستگاه خودپرداز



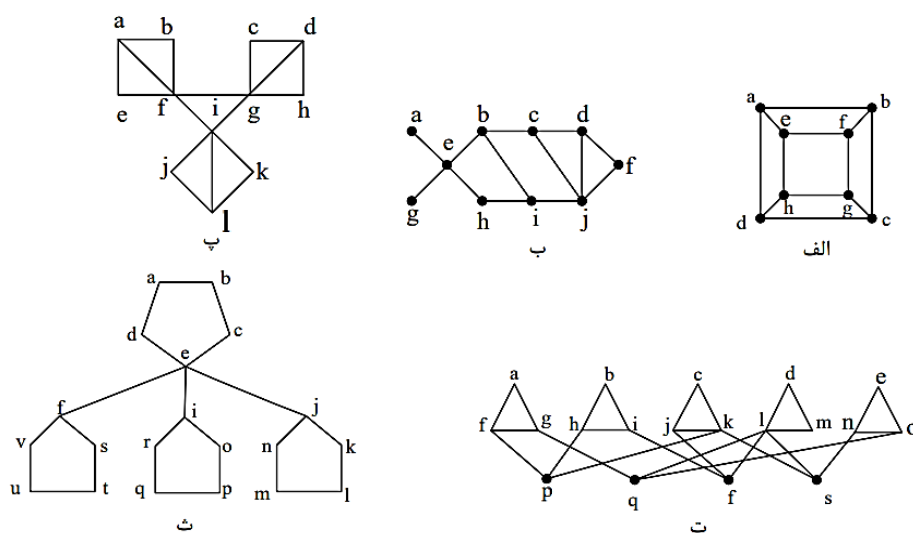
به گونه ای نصب شود که برای راحتی شهروندان هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

به جهت صرفه جویی در هزینه ها می خواهیم با کمترین تعداد دستگاه

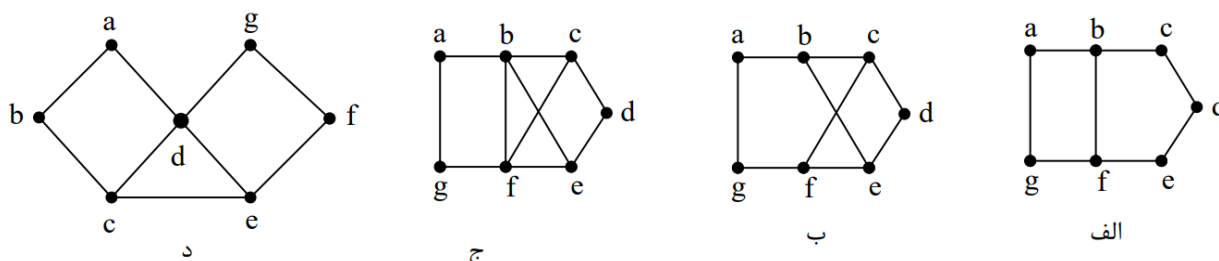
خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد. چه تعداد دستگاه خودپرداز و در کدام تقاطع ها باید نصب شوند؟

۲. عدد احاطه گری هر یک از گراف های زیر را مشخص کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۳. عدد احاطه گری هر یک از گراف های زیر را به دست آورید.





۴. اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی هایی از گراف G می توان پی برد؟

$\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال هایی را که گراف G می تواند داشته باشد را مشخص کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵. یک گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۲ بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

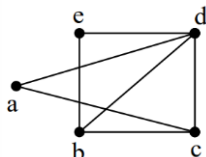
۶. گراف P_2 را رسم کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

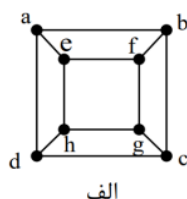
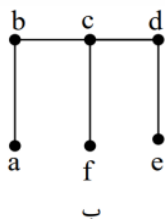
الف) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

۷. گراف مقابل چند احاطه گر مینیمال ۲ عضوی دارد؟



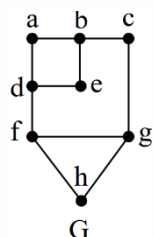
۸. گراف های زیر چند γ -مجموعه دارند؟





پاسخ پرسش های تشریحی

۱. برای مدل سازی این مسئله گراف مربوط به آن را رسم می کنیم به طوری که به جای هر تقاطع یک رأس و سپس دو



رأس را به هم وصل می کنیم اگر و تنها اگر تقاطع ها به هم متصل باشند. باید یک مجموعه احاطه گر

مینیمم برای گراف مقابل بیابیم. $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$ می باشد و از طرفی مجموعه $\{f, b\}$ یک احاطه گر

برای گراف G است پس $\gamma(G) = 2$. بنابراین می توان ۲ خودپرداز در تقاطع های b و f نصب کرد.

۲. الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$ است. از طرفی مجموعه $\{h, b\}$ یک احاطه گر برای گراف است. پس $\gamma(G) = 2$ می باشد.

ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{5} \right\rceil = 2$ است. از طرفی مجموعه $\{e, j\}$ یک احاطه گر برای گراف است. پس $\gamma(G) = 2$ می باشد.

پ) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{6} \right\rceil = 2$ است. از طرفی مجموعه $\{i, a, d\}$ یک احاطه گر برای گراف است. پس $\gamma(G) \leq 3$ می باشد.

از طرفی با کمتر از ۳ رأس نمی توان گراف را احاطه کرد زیرا هیچ رأسی بیشتر از ۶ رأس را احاطه نمی کند پس حداقل باید ۲ رأس درجه ۵ در این گراف داشته باشیم که چنین رأس هایی در این گراف وجود ندارد پس $\gamma(G) = 3$ است.

ت) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{19}{6} \right\rceil = 4$ است. از طرفی مجموعه $\{l, f, h, j, n\}$ یک احاطه گر برای گراف است. پس $\gamma(G) \leq 5$ می باشد.

از طرفی با کمتر از ۵ رأس نمی توان گراف را احاطه کرد زیرا هیچ رأسی بیشتر از ۶ رأس را احاطه نمی کند پس حداقل باید ۴ رأس درجه ۵ در این گراف داشته باشیم که چنین رأس هایی در این گراف وجود ندارد پس $\gamma(G) = 5$ است.

ث) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{20}{6} \right\rceil = 4$ است. می دانیم عدد احاطه گری C_5 برابر ۲ است پس از بین رئوس e, d, c, b, a حداقل ۲ تا

باید انتخاب شود. از بین رئوس v, u, t, s, f حداقل باید ۲ تا انتخاب شود. از بین رئوس r, q, p, o, i نیز حداقل باید ۲ تا

انتخاب شود. همچنین از بین رئوس n, m, l, k, j نیز حداقل باید ۲ تا انتخاب شود. پس $\gamma(G) \geq 8$ است. از طرفی

مجموعه $\{e, b, t, u, p, q, m, k\}$ یک احاطه گر برای گراف است پس $\gamma(G) \leq 8$ می باشد. بنابراین نتیجه می گیریم

$\gamma(G) = 8$ است.

تذکره: در این گونه گراف ها، $\gamma(G) = \frac{2n}{5}$ است.





۳. الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{V}{4} \right\rceil = 2$ است. از طرفی چون $\delta \geq 1$ می‌باشد پس $\frac{V}{4} = \frac{n}{4} = \frac{8}{4} = 2$ بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ همچنین $\gamma(G) \leq 3$ می‌باشد. می‌دانیم عدد احاطه‌گری هر دو گراف C_4 و C_5 برابر ۲ است. بنابراین از بین رئوس e, d, c حداقل یکی و از بین رئوس a, b, f, g حداقل ۲ تا باید انتخاب شود. پس $\gamma(G) \geq 3$ است. در نتیجه $\gamma(G) = 3$ می‌باشد.

ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{V}{4} \right\rceil = 2$ است. از طرفی می‌دانیم عدد احاطه‌گری هر دو گراف C_4 و C_5 برابر ۲ است. پس اگر از بین رئوس a, b, f, g یکی انتخاب شود، از بین رئوس c, d, e حداقل ۲ تا باید انتخاب شود و برعکس، پس $\gamma(G) \geq 3$ است. همچنین مجموعه $\{g, e, c\}$ یک احاطه‌گر برای گراف G است پس $\gamma(G) \leq 3$ می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم $\gamma(G) = 3$ است.

ج) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{V}{5} \right\rceil = 2$ است. از طرفی مجموعه $\{a, g, d\}$ یک احاطه‌گر برای گراف است پس $\gamma(G) \leq 3$ می‌باشد. از طرفی داریم:

$$\{b\} \cup N(b) = \{b, a, f, c, e\}, \{c\} \cup N(c) = \{c, b, d, f\}, \{d\} \cup N(d) = \{d, c, e\}$$

$$\{f\} \cup N(f) = \{f, b, g, c, e\}, \{e\} \cup N(e) = \{e, f, b, d\}, \{g\} \cup N(g) = \{g, a, f\}, \{a\} \cup N(a) = \{a, b, g\}$$

می‌بینیم هیچ ۲ مجموعه‌ای از این هفت مجموعه وجود ندارد که بتواند تمام رئوس گراف را احاطه کند پس $\gamma(G) \geq 3$ می‌باشد. بنابراین در نتیجه $\gamma(G) = 3$ است.

د) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{V}{5} \right\rceil = 2$ است. از طرفی مجموعه $\{b, d, f\}$ نیز یک احاطه‌گر برای گراف است پس $\gamma(G) \leq 3$ می‌باشد. همچنین داریم:

$$\{b\} \cup N(b) = \{a, b, c\}, \{a\} \cup N(a) = \{a, b, d\}, \{c\} \cup N(c) = \{c, d, e, b\}, \{g\} \cup N(g) = \{g, d, f\}$$

$$\{d\} \cup N(d) = \{a, d, g, c, e\}, \{f\} \cup N(f) = \{f, e, g\}, \{e\} \cup N(e) = \{e, f, d, e\}$$

می‌بینیم هیچ ۲ مجموعه‌ای از این هفت مجموعه وجود ندارد که بتواند تمام رئوس گراف را احاطه کند پس $\gamma(G) \geq 3$ می‌باشد. بنابراین در نتیجه $\gamma(G) = 3$ است.

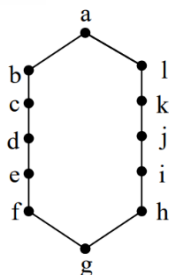




۴. اگر عدد احاطه‌گری در گراف برابر یک باشد یعنی یکی از رئوس با بقیه رئوس مجاور است. بنابراین اگر در گراف G از مرتبه n .

$\gamma(G) = 1$ باشد نتیجه می‌گیریم $\Delta(G) = n - 1$ است و $q_{\min} = n - 1$ و $q_{\max} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ می‌باشد.

۵. در گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۲ داریم $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor = 4$ است و اگر گراف C_{12} را رسم کنیم $\gamma(C_{12}) = \left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor = 4$.



۶. الف) از آن جایی که طبق نکته درسنامه داریم $\gamma(P_{12}) = \left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor = 4$ می‌توان مجموعه $\{V_2, V_5, V_8, V_{11}\}$ را یک

مجموعه احاطه‌گری مینیمم (γ -مجموعه) برای P_{12} دانست.

ب) مجموعه $\{V_2, V_4, V_6, V_8, V_{10}, V_{12}\}$ یک احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی برای P_{12} دانست.



۷. توجه داشته باشید که رأس d به بقیه رئوس وصل است بنابراین رأس d در هیچ مجموعه مینیمالی نمی‌باشد. بنابراین

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی این گراف عبارتند از $\{b, c\}, \{e, c\}, \{a, b\}, \{a, e\}$. پس این گراف ۴ مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد.

۸. الف) $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor = 2$ است. از طرفی مجموعه $\{h, b\}$ یک احاطه‌گر برای گراف G است پس $\gamma(G) \leq 2$.

بنابراین $\gamma(G) = 2$ می‌باشد. پس γ -مجموعه‌های این گراف عبارتند از: $\{h, b\}, \{f, d\}, \{g, a\}, \{e, c\}$

ب) $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor = 2$ است. از طرفی $\delta \geq 1$ پس $\gamma(G) \leq 3$ است. همچنین از بین رئوس a و b

حداقل باید یکی، از بین رئوس f و c حداقل باید یکی و از بین رئوس e و d نیز حداقل باید یکی انتخاب

شوند. پس $\gamma(G) \geq 3$ است. بنابراین پس $\gamma(G) = 3$ می‌باشد. پس γ -مجموعه‌های این گراف عبارتند

$$\text{از: } 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad \downarrow_{b \& a} \quad \downarrow_{c \& f} \quad \downarrow_{d \& e}$$

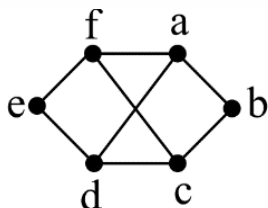
$\{a, f, e\}, \{a, c, e\}, \{a, f, d\}, \{a, c, d\}, \{b, f, e\}, \{b, f, d\}, \{b, c, e\}, \{b, c, d\}$





پرسش های چهار گزینه ای

۱. کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف مقابل یک مجموعه احاطه گر است؟



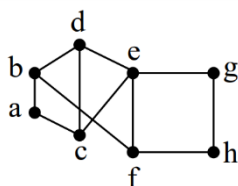
(۱) $\{a, c\}$

(۲) $\{d, f\}$

(۳) $\{a, d\}$

(۴) $\{d, b\}$

۲. کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف مقابل احاطه گر نیست؟



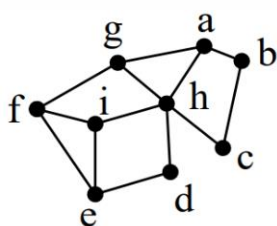
(۲) $\{e, g, f, d\}$

(۱) $\{e, f, b\}$

(۴) $\{h, e, a\}$

(۳) $\{d, g, a, b\}$

۳. کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف مقابل یک γ - مجموعه است؟



(۱) $\{c, b, h, i\}$

(۲) $\{f, d, a, c\}$

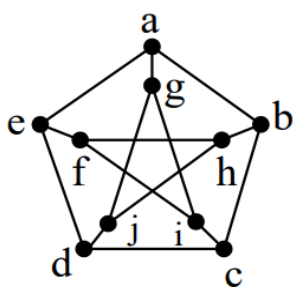
(۳) $\{b, d, f\}$

(۴) $\{a, e, g\}$





۴. گراف مقابل چند مجموعه احاطه گر مینیمم شامل رأس c می باشد؟



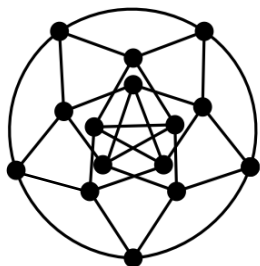
۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۵. عدد احاطه گری گراف مقابل کدام است؟



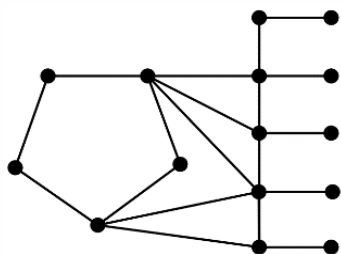
۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۶. عدد احاطه گری گراف مقابل کدام است؟



۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)



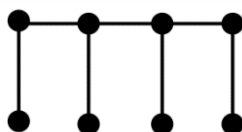
۷. گراف مقابل چند γ - مجموعه دارد؟

(۱) ۱۲

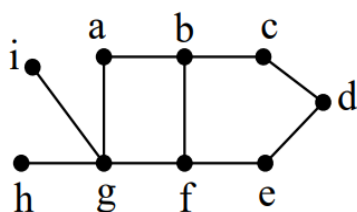
(۲) ۱۴

(۳) ۱۶

(۴) ۱۸



۸. کدام یک از مجموعه‌های زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف مقابل است؟



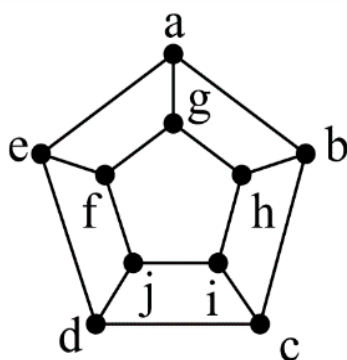
(۱) $\{g, b, e, d\}$

(۲) $\{g, b, f, d\}$

(۳) $\{b, d, h, i\}$

(۴) $\{a, g, e, f\}$

۹. کدام یک از مجموعه‌های زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال برای گراف مقابل است؟



(۱) $\{a, e, c, i\}$

(۲) $\{g, b, j, f\}$

(۳) $\{f, d, h, a\}$

(۴) $\{i, f, b, e\}$

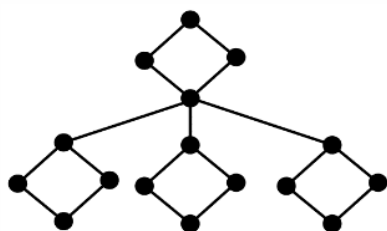




۱۰. عدد احاطه‌گری کدام گراف، حتماً یک است؟

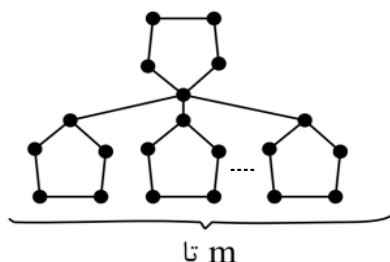
- (۱) گراف ستاره مرتبه ۵
(۲) گراف مسیری مرتبه ۵
(۳) گراف دوری مرتبه ۵
(۴) گرافی با اندازه ۵ از مرتبه ۵

۱۱. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

۱۲. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



- (۱) $2m$
(۲) $2m + 2$
(۳) $2m + 4$
(۴) $2m - 2$

۱۳. عدد احاطه‌گری گراف P_{194} کدام است؟

(۴) ۶۵

(۳) ۶۴

(۲) ۶۳

(۱) ۶۶





۱۴. گراف P_5 چند مجموعه احاطه گر مینیمم و چند مجموعه احاطه گر غیرمینیمال ۳ عضوی دارد؟

۷-۴ (۴)

۹-۴ (۳)

۷-۳ (۲)

۹-۳ (۱)

۱۵. در گراف P_6 چند مجموعه احاطه گر ۴ عضوی وجود دارد؟

۱۳ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

۱۶. در گراف های C_7 و P_7 مجموعاً چند مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی وجود دارد؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)





۱۷. در گراف C_5 چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم و در گراف C_7 چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال وجود دارد؟

۱۵-۳ (۴)

۱۴-۳ (۳)

۱۵-۵ (۲)

۱۴-۵ (۱)



۱۸. اختلاف تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر غیرمینیمال ۳ عضوی و تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی گراف C_6 کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



۱۹. مجموع عدد احاطه‌گری گراف‌های ۲- منتظم مرتبه ۱۱ مختلف کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)





۲۰. عدد احاطه‌گری گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۲ چند مقدار مختلف می‌تواند باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

۲۱. عدد احاطه‌گری گراف C_{55} کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

۲۲. مجموع تعداد ۷- مجموعه‌های گراف های C_4 و C_5 و C_6 کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۲۳. مجموع تعداد ۷- مجموعه‌های گراف های P_4 و P_5 و P_6 کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)





۲۴. مجموع تعداد γ - مجموعه‌های C_7 و C_8 و C_9 کدام است؟

۲۵ (۴)

۲۴ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

۲۵. مجموع تعداد γ - مجموعه‌های P_7 و P_8 و P_9 کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

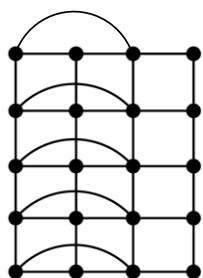
۲۶. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

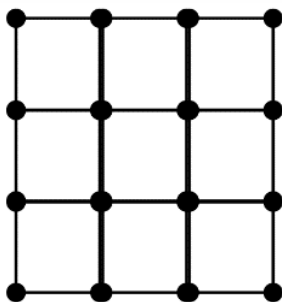
۶ (۳)

۷ (۴)





۲۷. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



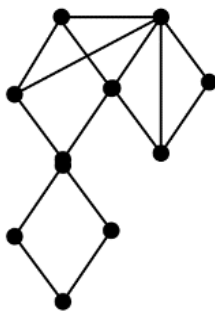
۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

۲۸. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



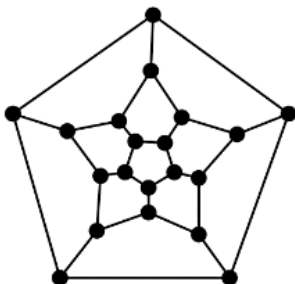
۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

۲۹. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)





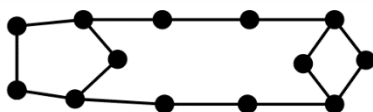
۳۰. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)



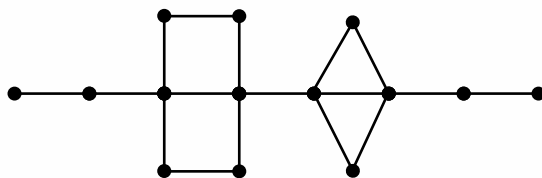
۳۱. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)



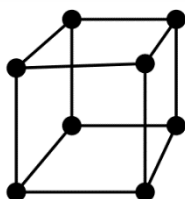
۳۲. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است و دارای چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم است؟

۳-۲ (۱)

۴-۲ (۲)

۳-۳ (۳)

۴-۳ (۴)





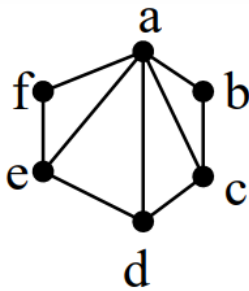
۳۳. گراف K_7 دارای چند γ - مجموعه است؟

۳۵ (۴)

۲۸ (۳)

۱۴ (۲)

۷ (۱)



۳۴. گراف مقابل چند مجموعه احاطه گر مینیمال ۳ عضوی دارد؟

۹ (۲)

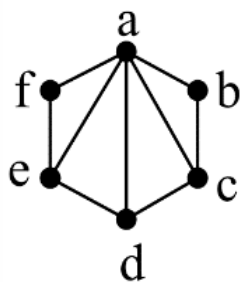
۱۰ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

۳۵. در گراف مقابل اختلاف تعداد مجموعه های احاطه گر غیرمینیمال ۲ عضوی و مجموعه های احاطه گر

مینیمال ۲ عضوی کدام است؟



۲ (۱)

۱ (۲)

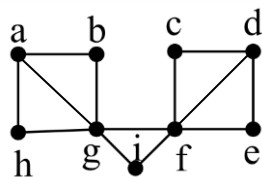
۴ (۳)

۳ (۴)





۳۶. مجموعه D یک احاطه‌گر برای گراف مقابل است. مجموعه D قطعاً با کدام مجموعه عضو مشترک دارد؟



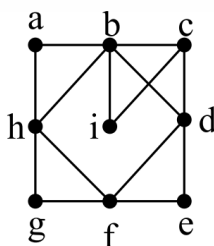
(۱) $\{e, f, i\}$

(۲) $\{c, d, f\}$

(۳) $\{a, b, h\}$

(۴) $\{g, a, c\}$

۳۷. کدام مجموعه برای گراف مقابل یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟



(۱) $\{d, h, i, c\}$

(۲) $\{b, h, f\}$

(۳) $\{b, c, e, g\}$

(۴) $\{a, g, e, c\}$

۳۸. کدام گراف فقط یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟

(۴) P_{16}

(۳) P_{15}

(۲) P_{14}

(۱) P_{13}

۳۹. گراف C_{21} چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۷ عضوی دارد؟

(۴) ۵

(۳) ۴

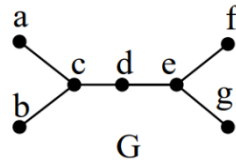
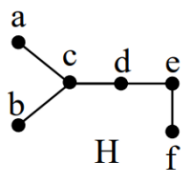
(۲) ۳

(۱) ۲





۴۰. گراف های G و H به ترتیب چند مجموعهٔ احاطه گر ۳ عضوی دارند؟

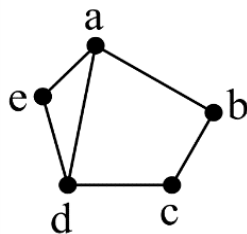


۸-۷ (۱)

۷-۸ (۲)

۷-۷ (۳)

۸-۸ (۴)



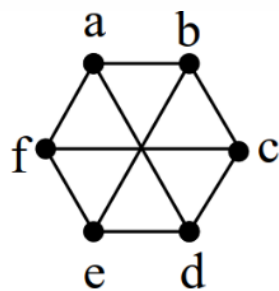
۴۱. گراف مقابل چند مجموعهٔ احاطه گر مینیمال ۲ عضوی دارد؟

۶ (۱)

۷ (۲)

۹ (۳)

۸ (۴)



۴۲. در گراف مقابل چند مجموعهٔ احاطه گر مینیمم وجود دارد؟

۶ (۱)

۷ (۲)

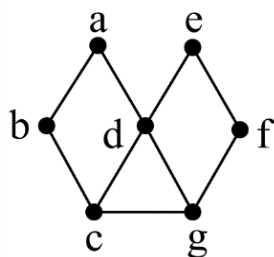
۸ (۳)

۹ (۴)





۴۳. در گراف مقابل چند مجموعه احاطه گر مینیمم شامل رأس b وجود دارد؟



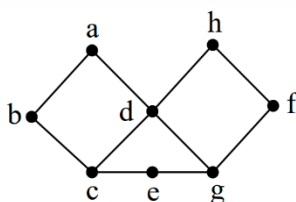
۸ (۱)

۹ (۲)

۱۰ (۳)

۱۱ (۴)

۴۴. در گراف مقابل چند مجموعه احاطه گر مینیمال شامل رأس d وجود دارد؟



۶ (۱)

۵ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۴۵. چند گراف G از مرتبه ۴ و اندازه ۴ وجود دارد که در آن $\gamma(G) = ۱$ باشد؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)





۴۶. در گراف G از مرتبه ۱۰، $\gamma(G) = 2$ و بیشترین مقدار خود را داراست. اگر این گراف دارای $(\Delta + 1)$ رأس درجه ۲ باشد در این صورت چند دور به طول ۳ وجود دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴۷. فرض کنید در یک شهرستان ۷ دبیرستان وجود دارد که با جاده‌هایی به یکدیگر متصل شده اند. می‌خواهیم تعدادی ایستگاه امنیتی در برخی از دبیرستان‌ها مستقر کنیم به طوری که تمام دبیرستان‌ها یا دارای ایستگاه امنیتی باشند یا حداکثر ۷ کیلومتر تا دبیرستان دارای ایستگاه امنیتی فاصله داشته باشد. فاصله بین دبیرستان‌ها به صورت مقابل می‌باشد. حداقل به چند ایستگاه امنیتی نیاز داریم؟

	A	B	C	D	E	F	G
A	۰	۳	۸	۱۰	۷/۵	۹	۴
B	۳	۰	۳/۵	۷/۵	۶	۵/۵	۸/۵
C	۸	۳/۵	۰	۴	۱۱	۵	۱۰
D	۱۰	۷/۵	۴	۰	۲	۹	۹/۵
E	۷/۵	۶	۱۱	۲	۰	۳	۸
F	۹	۵/۵	۵	۹	۳	۰	۶
G	۴	۸/۵	۱۰	۹/۵	۸	۶	۰

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۴۸. در گراف G از مرتبه ۱۱، $\gamma(G) = 1$ است. کمترین اندازه گراف G کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)





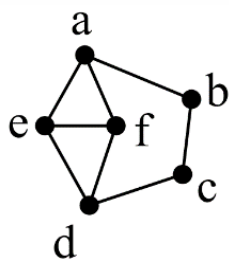
۴۹. در گراف G از مرتبه ۱۱، $\gamma(G) = 2$ است. بیشترین اندازه گراف G کدام است؟

۵۱ (۴)

۵۰ (۳)

۴۹ (۲)

۴۸ (۱)



۵۰. گراف مقابل چند γ - مجموعه دارد؟

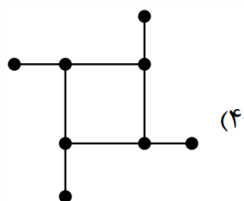
۹ (۱)

۶ (۲)

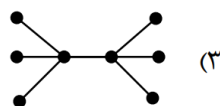
۷ (۳)

۸ (۴)

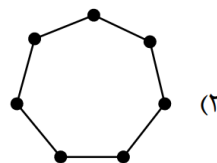
۵۱. در کدام گراف فقط یک مجموعه احاطه گر مینیمم وجود دارد؟



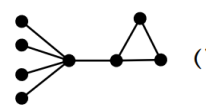
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)





۵۲. تعداد اعضای یک مجموعه احاطه گر مینیمال برای P_9 ، چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۵۳. یک مجموعه احاطه گر مینیمال برای P_{13} ، حداقل دارای چند عضو است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

۵۴. یک مجموعه احاطه گر مینیمال برای P_{15} ، حداکثر دارای چند عضو است؟

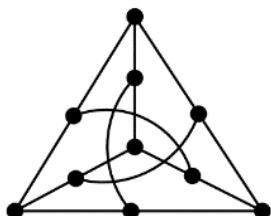
۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۵۵. عدد احاطه گری گراف مقابل کدام است؟



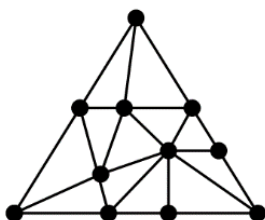
۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

۵۶. عدد احاطه گری گراف مقابل کدام است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

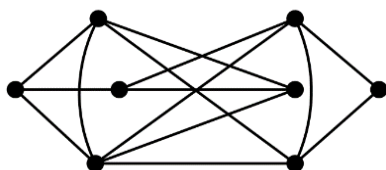
۴ (۳)

۵ (۴)





۵۷. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



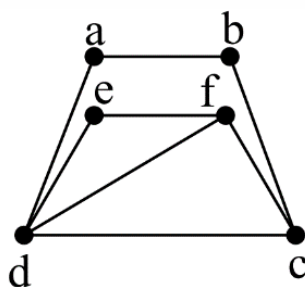
۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۵۸. چند احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی برای گراف مقابل وجود دارد که شامل رأس e باشد؟



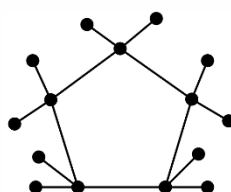
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۵۹. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

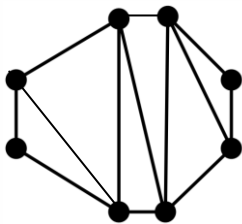
۵ (۳)

۶ (۴)





۶۰. گراف مقابل چند مجموعه احاطه گر مینیمال ۲ عضوی دارد؟



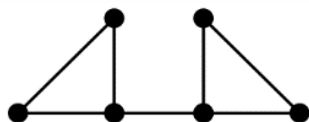
۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

۶۱. گراف مقابل چند ۷-مجموعه دارد؟



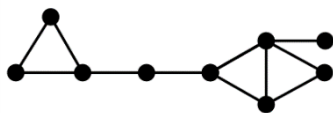
۶ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

۶۲. عدد احاطه گر گراف مقابل کدام است؟



۳ (۱)

۲ (۲)

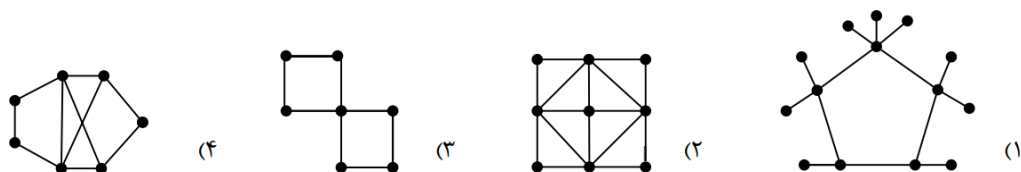
۵ (۳)

۴ (۴)

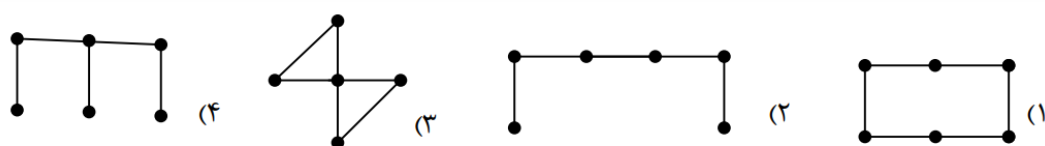




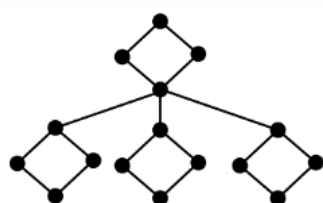
۶۳. در کدام گراف عدد احاطه‌گری برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ می‌باشد؟



۶۴. در کدام گراف عدد احاطه‌گری برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ نمی‌باشد؟

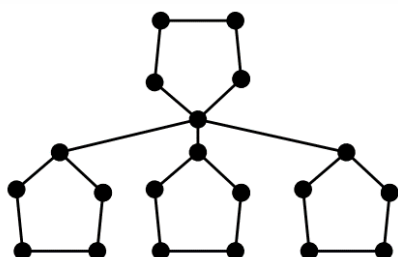


۶۵. یک مجموعه k عضوی از رئوس، یک احاطه‌گر مینیمال برای گراف مقابل است. بیشترین مقدار k کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

۶۶. یک مجموعه k عضوی از رئوس، یک احاطه‌گر مینیمال برای گراف مقابل است. بیشترین مقدار k کدام است؟

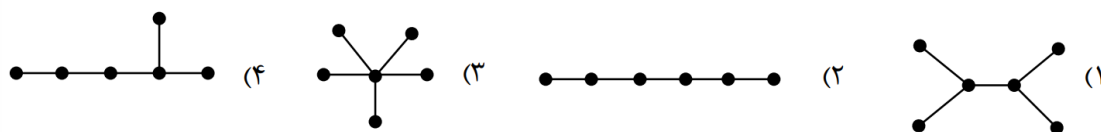


- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۱





۶۷. کدام گراف فقط دارای یک احاطه گر مینیمم نمی باشد؟



۶۸. در گراف همبند G از مرتبه ۹، $\gamma(G) = 2$ است. اگر Δ بیشترین مقدار خود را دارا باشد و گراف فاقد دور

باشد در این صورت چند γ - مجموعه برای این گراف وجود دارد؟

- ۴ (۱) ۲ (۳) ۳ (۲) ۱ (۴)



۶۹. در گراف همبند G از مرتبه ۹، $\gamma(G) = 2$ است. اگر Δ بیشترین مقدار خود را دارا باشد و گراف فاقد دور

باشد در این صورت تعداد اعضای یک مجموعه احاطه گر مینیمال در این گراف چند مقدار مختلف می تواند باشد؟

- ۱ (۲) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)





۷۰. اگر در گراف های C_n و C_{n+2} عدد احاطه‌گری برابر ۶ باشد در این صورت تعداد مجموع γ - مجموعه‌های

گراف‌های P_{n-1} و C_{n+1} و C_{n+2} کدام است؟

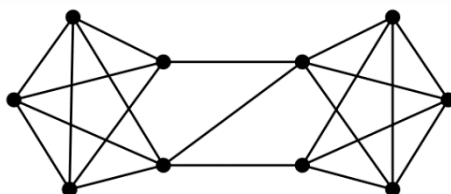
۲۳ (۴)

۲۲ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

۷۱. در گراف مقابل چند γ - مجموعه وجود دارد؟



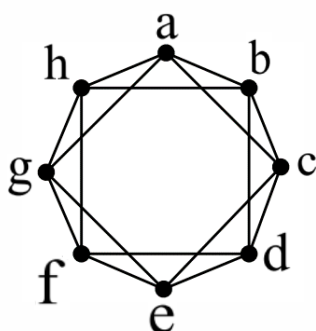
۱۲ (۱)

۱۱ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

۷۲. گراف مقابل چند احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی شامل رأس b دارد؟



۵ (۲)

۲ (۱)

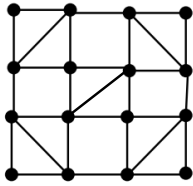
۴ (۴)

۳ (۳)





۷۳. عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



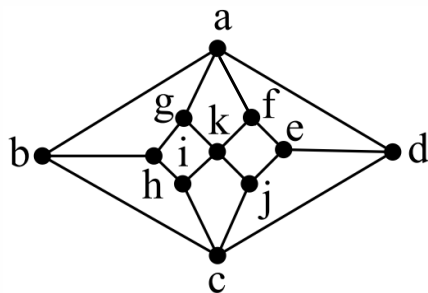
۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

۷۴. در گراف مقابل چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی شامل رئوس a و b وجود دارد؟



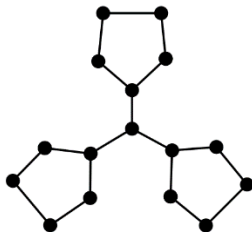
۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

۷۵. یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال در گراف مقابل حداکثر دارای چند عضو است؟



۷ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

۷۶. چند احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی در گراف P_6 وجود دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)





۷۷. چند مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی در گراف C_7 وجود دارد؟

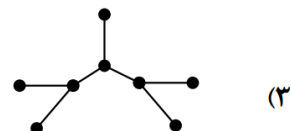
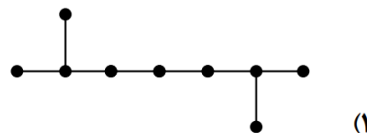
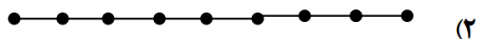
۲۸ (۴)

۲۶ (۳)

۲۴ (۲)

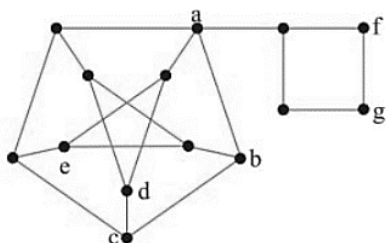
۳۰ (۱)

۷۸. در کدام گراف فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم وجود دارد؟



(سراسری ریاضی ۹۸)

۷۹. کدام مجموعه برای گراف زیر، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟



{a, c, e, g} (۱)

{a, d, e, g} (۲)

{a, b, d, e} (۳)

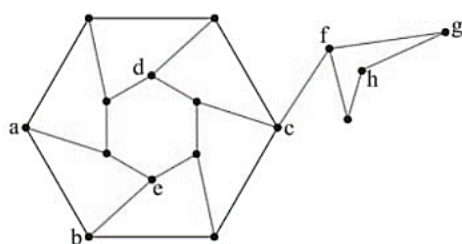
{a, d, e, f} (۴)





(فارج ریاضی ۹۸)

۸۰. کدام مجموعه برای گراف زیر، یک مجموعه احاطه گر مینیمال است؟

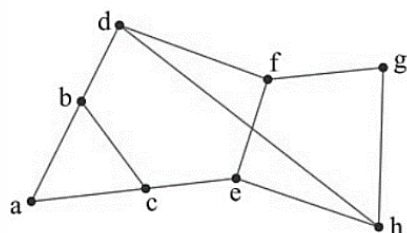


(۱) $\{a, b, c, d, h\}$ (۲) $\{b, c, e, d, g\}$

(۳) $\{a, c, e, d, h\}$ (۴) $\{a, c, e, d, g\}$

(سراسری ریاضی ۹۹)

۸۱- در گراف زیر، کدام مجموعه، یک مجموعه احاطه گر مینیمال، نیست؟



(۱) $\{a, e, g\}$

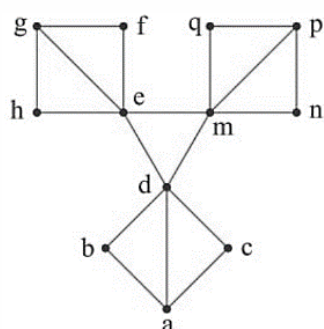
(۲) $\{a, f, g\}$

(۳) $\{b, c, g\}$

(۴) $\{c, f, h\}$

(فارج ریاضی ۹۹)

۸۲- در گراف زیر، تعداد مجموعه های متمایز احاطه گر مینیمال، کدام است؟



(۱) ۲۷

(۲) ۶

(۳) ۴

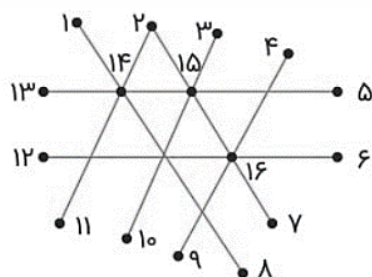
(۴) ۳





(فاج ریاضی ۱۴۰۰)

۸۳- برای گراف زیر، عدد احاطه گری مینیمال کدام است؟



۲ (۱)

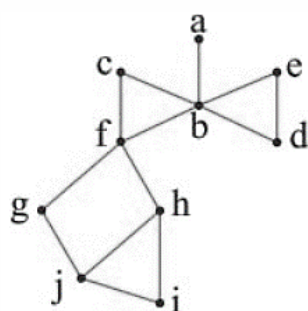
۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۸۴- در گراف زیر، مجموعه احاطه گر مینیمال، کدام است؟



$\{b, h\}$ (۱)

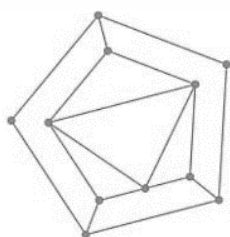
$\{b, g, i\}$ (۲)

$\{a, c, h\}$ (۳)

$\{a, c, f, j\}$ (۴)

(سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

۸۵- شکل زیر، گراف G را نشان می دهد. مقدار $\gamma(G)$ کدام است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)





خلاصه برداری نکات مهم درس





خلاصه برداری نکات مهم درس





خلاصه برداری نکات مهم درس





درس اول: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری

اصل اساسی شمارش (اصل ضرب)

اگر عملی دارای n مرحله مستقل از هم باشد به طوری که مرحله اول را بتوان k_1 طریق و مرحله دوم را به k_2 طریق و ... و مرحله n ام را به k_n طریق انجام داد، در این صورت این عمل را به « $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$ » طریق مختلف انجام داد.

۱. یک دانش آموز به چند طریق می تواند به ۵ سؤال چهار گزینه ای پاسخ دهد؟

۲. با ارقام ۴ و ۵ و ۳ و ۹ چند عدد چهار رقمی می توان ساخت به طوری که تکرار هم مجاز باشد؟

جایگشت (Permutation)

به نحوه قرار گرفتن چند شی در کنار یکدیگر جایگشت گفته می شود.

تبدیل (ترتیب)

اگر در انتخاب k شی از بین n شی، ترتیب انتخاب ها مهم باشد تعداد جایگشت های آن ها را تبدیل یا ترتیب k شی از n شی می

گوییم و با نماد $P(n, k)$ آن را نمایش می دهیم.

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

۳. تعداد جایگشت های پنج حرفی انتخاب شده از حروف کلمه KETAB را بیابید.





۴. تعداد جایگشت های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمه KONKOUR را بیابید.

۵. با حروف کلمه BOOK چند کلمه چهار حرفی بدون توجه به مفهوم آن می توان ساخت؟

نکته: قضیه جایگشت با تکرار: اگر n شی مفروض باشند به طوری که n_1 تای آن ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن ها از نوع k ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت های این n شی برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

۶. با ارقام ۱ و ۱ و ۳ و ۳ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

۷. با ارقام ۰ و ۰ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟

ترکیب (Combination)

اگر در انتخاب k شی از بین n شی، ترتیب انتخاب ها مهم نباشد، تعداد جایگشت های آن ها را ترکیب k شی از n شی می گوئیم و با نماد $C(n, k)$ آن را نمایش می دهیم.

$$C(n, k) = \frac{n!}{k! \times (n - k)!} = \binom{n}{k}$$





۸. دانش آموزی باید به ۸ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ دهد. به چند طریق می تواند این ۸ سؤال را پاسخ دهد؟

۹. از بین ۶ جفت کفش متمایز ۳ لنگ کفش انتخاب می کنیم. به چند طریق امکان دارد که ۲ لنگه از این کفش ها از یک جفت کفش باشد؟

نکته: چند قاعده کلی در ترکیب ها وجود دارد که عبارتند از:

$$\textcircled{1} \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\textcircled{2} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\textcircled{3} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{قاعده پاسکال}$$

نکته: اگر بخواهیم n شی یا n نفر را در یک میز گرد بچینیم یا بنشانیم تعداد حالت های آن برابر $(n-1)!$ است و اگر جهت دور اهمیت نداشته باشد تعداد حالت ها برابر $\frac{(n-1)!}{2}$ خواهد بود.

۱۰. با اعداد ۰، ۱، ۲، ۵، ۵ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

۶۰ (۴)

۴۸ (۳)

۳۰ (۲)

۱۸ (۱)





فصل سوم: ترکیبیات

۱۱. از بین ۸ مهندس برق و ۵ مهندس مکانیک به چند طریق می توان یک گروه ۶ نفره شامل ۴ مهندس برق و ۲ مهندس مکانیک تشکیل داد؟

- (۱) ۷۰۰ (۲) ۱۴۰۰ (۳) ۳۵۰ (۴) ۱۰۵۰

۱۲. در یک کلاس ۶ دانش آموز عینکی و ۵ دانش آموز غیرعینکی داریم. اگر ۴ دانش آموز را به تصادف انتخاب کنیم در چند حالت حداقل ۳ دانش آموز غیرعینکی انتخاب شده است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۶۵ (۴) ۷۵

۱۳. به چند طریق می توان ۶ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک را در یک ردیف چید به طوری که هیچ دو کتاب فیزیکی در کنار هم نباشند؟ (کتاب های هر درس مشابه می باشند).

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۵ (۳) ۲۰ (۴) ۴۸

۱۴. حروف کلمه PELIKAN را به تصادف کنار یکدیگر قرار می دهیم، مطلوب است:

الف: تعداد جایگشت های ۷ حرفی آن را بیابید.

ب: تعداد کلماتی که دو حرف L و A کنار هم باشند را بیابید.

ج: تعداد کلماتی که با حرف N شروع و به حرف K ختم می شود را بیابید.

د: تعداد کلماتی که دو حرف E و N کنار هم و دو حرف P و I نیز در کنار هم باشند را بیابید.

ر: تعداد کلماتی که حروف صدادر و بی صدا یک در میان باشند را بیابید.

ز: تعداد کلماتی که حروف صدادر فقط در مکان های فرد باشند را بیابید.



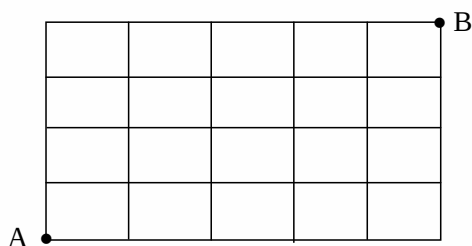


و: تعداد کلماتی که حروف صدادار به ترتیب حروف الفبا (یعنی قبل A از E و E قبل از I) در کنار هم باشند را بیابید.

ه: تعداد کلماتی که حروف صدادار در کنار هم و حروف بی صدا در کنار هم باشند را بیابید.

ی: تعداد کلماتی که حروف صدادار به ترتیب حروف الفبا باشند را بیابید.

۱۵. اگر در شکل مقابل فقط حرکت به سمت راست و حرکت به سمت بالا مجاز باشد، به چند طریق می توان از A به B رسید؟



۷۰ (۲)

۱۲۶ (۱)

۸۰ (۴)

۹۶ (۳)

۱۶. ۶ نفر را به چند طریق می توان در سه اتاق یک نفره، ۲ نفره و ۳ نفره واقع در یک هتل اسکان داد؟

۳۰ (۴)

۱۸۵ (۳)

۶۰ (۲)

۱۲۰ (۱)



۱۸. چهار نفر به نام های a, b, c, d در یک اتاق حضور دارند. به چند طریق امکان دارد که روز تولد فرد a دقیقاً بعد از

روز تولد فرد b باشد؟

توزیع n شی یکسان در k حوزه مختلف

۱۹. به چند طریق می‌توان ۵ سیب یکسان را در ۳ جعبهٔ مختلف قرار داد؟

۲۰. به چند طریق می‌توان ۶ انگشتر یکسان را در ۴ انگشت دست چپ (به جز انگشت شست) قرار داد؟





نکته: برای توزیع n شی یکسان در k حوزه مختلف، $(k-1)$ خط عمودی و n شی یکسان وجود دارند که تعداد کل حالت های تقسیم بندی برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

اعداد صحیح و نامنفی در واقع همان اعداد حسابی می باشند که عبارتند از $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

۲۱. معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

نکته: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

تذکر: جواب های صحیح و نامنفی یعنی $x_i \geq 0$ به طوری که $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

۲۲. معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $x_1 \geq 2$ باشد؟

نکته: اگر $c_1, c_2, \dots, c_k$ اعدادی صحیح باشند، تعداد جواب های صحیح معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ به طوری که

$x_1 \geq c_1$ و $x_2 \geq c_2, \dots, x_k \geq c_k$ باشد برابر $\binom{n+k-1-(c_1+c_2+\dots+c_k)}{k-1}$ است.





۲۳. معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$ چند جواب صحیح دارد به طوری که $x_i \geq 2$ باشد؟ ($i = 1, 2, \dots, 5$)

(۴) ۵۶

(۳) ۳۵

(۲) ۷۰

(۱) ۱۱۲

۲۴. معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

نکته: تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n+k-1-(1 \times k)}{k-1}$ است.

۲۵. معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $2 \leq x_1 \leq 5$ باشد؟

۲۶. به چند طریق می توان یک دسته گل ۸ شاخه ای از سه نوع گل ساخت به طوری که از هر نوع گل حداقل یک

شاخه موجود باشد؟

(۴) ۲۱

(۳) ۱۸

(۲) ۲۴

(۱) ۲۸

۲۷. معادله $x_1^3 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

(۴) ۵۲

(۳) ۲۸

(۲) ۶۴

(۱) ۳۶





۲۸. نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

نکته: تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ برابر تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k + y = n$ می باشد که هر دو برابر $\binom{n+k}{k}$ است.

اثبات: می دانیم تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ برابر است با:

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \binom{k+2}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1}{k-1}$$

به جای $\binom{k-1}{k-1}$ می نویسیم $\binom{k}{k}$ و از قاعده پاسکال استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1}{k-1} &= \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k-1} + \binom{k+2}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1}{k-1} = \dots \\ &= \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} \end{aligned}$$

ملاحظه می گردد که با ادامه این روش به $\binom{n+k}{k}$ می رسیم که برابر با تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k + y = n$ می باشد.

۲۹. تعداد جملات بسط $(a+b+c+d)^5$ چند تاست؟

پاسخ: می دانیم در بسط $(a+b+c+d)^5$ جمله $(a+b+c+d)$ پنج بار در خودش ضرب می شود. پس برای مناسبه هر یک از جملات این بسط باید از هر پنج پرانتزی که در هم ضرب می شوند، یک حرف را انتخاب کنیم.

به طور مثال اگر از پرانتز اول حرف a ، از پرانتز دوم حرف c ، از پرانتز سوم حرف d ، از پرانتز چهارم حرف b و از پرانتز پنجم حرف a

را انتخاب کنیم جمله ای به صورت $acdab$ یا a^2bcd خواهیم داشت. بنابراین هر جمله این بسط به صورت

$a^{x_1} b^{x_2} c^{x_3} d^{x_4}$ است که در آن $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ می باشد. پس تعداد جملات این بسط برابر با تعداد

جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ است که برابر با $\binom{5+4}{4} = \binom{9}{4} = 126$ می باشد.





نکته: تعداد جملات بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ برابر با $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

۳۰. در بسط $(x + y + z)^9$ ضریب جمله $x^2 y^4 z^3$ را بیابید.

پاسخ: طبق آن چه در سؤال قبل بیان کردیم می دانیم که در بسط $(x + y + z)^9$ جمله $(x + y + z)$ نه بار در خودش ضرب

می شود. پس برای ظاهر شدن x^2 در جمله مورد نظر باید از ۹ پراکنش ۲ تا از انتخاب ها x باشد که این عمل به $\binom{9}{2}$ طریق امکان پذیر

است. همچنین از ۶ پراکنش باقی مانده باید ۴ تا از انتخاب ها y باشد که به $\binom{6}{4}$ طریق ممکن می باشد و در آخر از ۵ پراکنش باقی مانده باید

صرف z را انتخاب کنیم که این عمل هم به $\binom{5}{1}$ طریق امکان پذیر است.

پس در کل ضریب جمله $x^2 y^4 z^3$ برابر $\frac{9!}{2!4!3!} = \binom{9}{2} \binom{6}{4} \binom{5}{1}$ است. طبق قضیه بایگشت با تکرار تغییر در جایگاه های

x ها و y ها یا z ها جمله جدیدی را به وجود نمی آورد و همگی یک جمله می باشند که مجموع آن ها (ضریب آن ها) در این بسط

برابر $\frac{9!}{2!4!3!}$ است.

نکته: در بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ ضریب جمله $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_k^{x_k}$ به طوری که $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ باشد

برابر با $\frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!}$ است.

مربع های لاتین

سه معلم به نام های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در سه جلسه ۸-۱۰ و ۱۰-۱۲ و ۴-۲ در سه کلاس A و B و C تدریس

کنند به طوری که هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر معلم دقیقاً یکبار در هر یک از کلاس ها

تدریس کنند. می توان برنامه ریزی کلاسی این سه معلم را به صورت زیر در نظر گرفت تا از تداخل در برنامه آن ها جلوگیری کرد.

جلسه / کلاس	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۴-۲
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	عباسی	احمدی	کریمی
C	کریمی	عباسی	احمدی





با این برنامه ریزی:

الف: هیچ معلمی در هیچ یک از سه جلسه مذکور بیکار نیست.

ب: هیچ معلمی در هیچ کلاسی بیش از یک بار تدریس نکرده است.

ج: هر سه معلم در هر سه کلاس تدریس کرده اند.

د: تداخل در برنامه ریزی هیچ کلاسی و هیچ معلمی صورت نگرفته است.

نکته: مربع لاتین: یک جدول مربعی $n \times n$ از اعداد $1, 2, \dots, n$ که سطرها و ستون های آن با اعداد $1, 2, \dots, n$ پر شده باشد به طوری که در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد را یک مربع لاتین مرتبه n می گوئیم. به هر یک از اعداد درون یک مربع لاتین یک آرایه می گوئیم.

مثال: یک مربع لاتین مرتبه ۲، یک مربع لاتین مرتبه ۳ و یک مربع لاتین مرتبه ۴ در زیر نمایش داده شده است.

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱

۱	۲
۲	۱

نکته: در مربع لاتین مرتبه n می توان جای دو سطر و یا دو ستون را با هم تعویض کرد زیرا طبق تعریف مربع لاتین در هیچ سطر یا در هیچ ستونی درآیة تکراری وجود ندارد.

۳۱. چند مربع لاتین مرتبه ۲ وجود دارد؟

۳۲. چند مربع لاتین مرتبه ۳ وجود دارد؟





نکته: تعداد مربع های لاتین مرتبه n همواره بر $n!$ بخش پذیر است زیرا در سطر اول به $n!$ طریق می توان اعداد 1 تا n را قرار داد. تعداد مربع های مرتبه 1 و 2 و 3 و 4 و 5 ... به ترتیب برابر 1 و 2 و 12 و 576 و 161280 و ... می باشد.

۳۳. اگر در یک مربع 4×4 درآیه های $a_{22} = 1$ و $a_{23} = 2$ و $a_{33} = 1$ و $a_{44} = 4$ ، به چند طریق می توان آن را به

مربعی لاتین تبدیل کرد؟

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

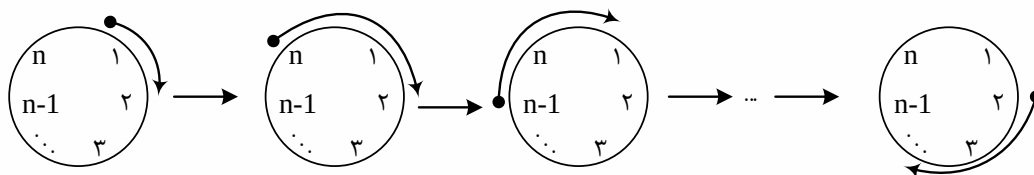
۳۴. اگر در یک مربع 4×4 درآیه های $a_{22} = 1$ و $a_{23} = 2$ و $a_{33} = 3$ و $a_{44} = 4$ ، به چند طریق می توان آن را به

مربعی لاتین تبدیل کرد؟

مربع لاتین چرخشی

$$A_n = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{array}$$

یک مربع لاتین مرتبه n که هر سطر آن با جایگشت دوری از سطر قبلی آن به دست می آید را مربع لاتین چرخشی می گوئیم. در شکل مقابل یک مربع لاتین چرخشی مرتبه n نمایش داده شده است.





۳۵. یک مربع لاتین چرخشی مرتبه‌ی ۳ و یک مربع لاتین چرخشی مرتبه‌ی ۴ بنویسید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۶. دو مربع لاتین مرتبه ۵ بنویسید.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۵	۱	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۱	۲	۵	۳
۵	۴	۱	۳	۲

و

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۴	۱	۵	۳
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۱	۵	۳	۲
۵	۳	۲	۱	۴

پاسخ: با توجه به تعریف مربع لاتین چرخشی به راحتی می‌توان پندیدن

مربع لاتین مرتبه ۵ نوشت (با جا به جایی سطرها یا ستون‌ها) ولی مربع

های لاتین غیر چرخشی را می‌نویسیم تا کمی زمان صرف کنیم و کمی

فلسف‌ر بسوزانیم.

نکته: با اعمال جایگشت بر روی اعضای یک مربع لاتین یک مربع لاتین دیگر به وجود می‌آید زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با تعریف مربع لاتین در تناقض است.

مثال: جایگزینی اعداد ۱ و ۲ و ۳ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳ و ۱ و ۲ جدول دوم حاصل شده است.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$۱ \rightarrow ۳$

$\longrightarrow$

$۲ \rightarrow ۱$

$۳ \rightarrow ۲$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳





۳۷. با اعمال جایگشت اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ از مربع لاتین A به ترتیب با اعداد ۱، ۴، ۲، ۳ مربع B حاصل شده است. اگر در

مربع A درآیه ۳ $a_{۳۳} = ۳$ باشد و در مربع B درآیه های $b_{۳۳} = b_{۲۲} = ۱$ و $b_{۴۴} = ۲$ باشند در این صورت مجموع

درآیه های $a_{۳۳}, a_{۴۱}, a_{۱۱}$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

۳۸. با اعمال جایگشت اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ از مربع لاتین A به ترتیب اعداد ۱، ۴، ۲، ۳ مربع B حاصل شده است. اگر در

مربع A درآیه های $a_{۳۳} = a_{۴۴} = ۱$ و $a_{۳۴} = ۳$ و در مربع B درآیه های $b_{۱۲} = ۴$ و $b_{۳۱} = ۲$ باشند در این صورت

اختلاف، مجموع درآیه های $a_{۲۲}$ و $a_{۱۴}$ در مربع A از مجموع درآیه های $b_{۴۱}$ و $b_{۳۳}$ در مربع B کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

دو مربع لاتین متعامد

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند و از کنار هم قرار دادن درآیه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام ارقام سمت چپ مربوط به مربع A و تمام ارقام سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت می گوییم دو مربع لاتین A و B متعامدند اگر هیچ کدام از اعداد دو رقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند.





مثال: دو مربع لاتین A و B متعامدند.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 32 & 23 & 11 \\ 21 & 12 & 33 \\ 13 & 31 & 22 \end{bmatrix}$$

توجه: می دانیم با اعداد ۱ تا n می توان $n \times n = n^2$ عدد دو رقمی مختلف ساخت. اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند از کنار هم قرار دادن درآیه های آن ها باید این n^2 تا عدد دو رقمی مختلف تشکیل شود.

تذکر: برای آن که نشان دهیم دو مربع لاتین، متعامد نیستند کافیست در یکی از دو مربع دو آرایه ی یکسان پیدا کنیم به طوری که در جایگاه های نظیر به این دو درآیه در مربع دیگر نیز درآیه ها با هم یکسان باشند. در این صورت دو مربع لاتین، متعامد نیستند.

مثال: دو مربع لاتین زیر متعامد نیستند زیرا درآیه های متمایز شده در هر دو با هم برابرند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۹. آیا دو مربع لاتین متعامد 2×2 وجود دارد؟

۴۰. چند جفت مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ وجود دارد؟





نکته: برای $n = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد وجود ندارد. برای $n = 3$ و $n = 4$ تعداد جفت مربعات لاتین متعامد به ترتیب برابر ۳۶ و ۳۴۵۶ تا می باشند.

توجه: برای هر $n \neq 1, 2, 6$ حداقل دو مربع لاتین متعامد وجود دارد.

قطر پراکنده

در یک مربع لاتین مرتبه n به یک مجموعه n عضوی از درآیه های متمایز به طوری که هیچ دو درآیه ای در یک سطر یا یک ستون قرار نداشته باشند یک قطر پراکنده می گوییم.

مثال: درآیه ها با شکل های یکسان نشان دهنده یک قطر پراکنده در مربع لاتین هستند.

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

نکته: مربع لاتین مرتبه n دارای زوج متعامد است اگر و تنها اگر دارای n قطر پراکنده باشد.

۴۱. کدام مربع لاتین، زوج متعامد ندارد؟

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

هر سه گزینه ۱ و ۳ و ۴ دارای ۴ قطر پراکنده هستند بنابراین طبق نکته ۴۱، زوج متعامد دارند. مربع لاتین گزینه ۲، مربع

لاتین پیرشلی مرتبه زوج است.





سوال مهم: آیا همه مربع های لاتین چرخشی دارای زوج متعامد نیستند؟

برای جواب به این سوال به مربع لاتین چرخشی مرتبه ۳ مقابل دقت کنید. می بینیم که دارای ۳ قطر پراکنده است بنابراین طبق نکته قبل دارای زوج متعامد می باشد.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

نکته: در یک مربع لاتین چرخشی مرتبه n :

الف) اگر n زوج باشد ($n \geq 2$)، هیچ زوج متعامدی ندارد.

ب) اگر n فرد باشد ($n \geq 3$)، دارای زوج متعامدی می باشد.

۴۲. دو مربع لاتین A و B متعامدند. اگر در مربع A درآیه های $a_{11} = 4$ و $a_{21} = 1$ و $a_{31} = 2$ و $a_{41} = 3$ و در مربع

B درآیه های $b_{11} = 4$ و $b_{21} = 1$ و $b_{31} = 2$ و $b_{41} = 3$ باشند در این صورت مجموع درآیه های a_{12} و a_{22} و

b_{12} و b_{22} کدام است؟ (هر دو مرتبه ۴ می باشند.)

۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۶ (۴)





(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۳. دو مربع لاتین 4×4 مقابل را در نظر بگیرید.

الف) آیا دو مربع لاتین متعامدند؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را B' بنامید.آیا A و B' متعامدند؟۴۴. ثابت کنید اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 مربعی لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B

(مشابه تمرین کتاب درسی)

باشد در این صورت A و B_1 نیز متعامدند.

پاسخ: استفاده از برهان خلف.

فرض خلف: دو مربع لاتین A و B_1 متعامد نیستند. بنابراین دو درآیۀ یکسان در A وجود دارد که درآیه های نظیر به آن ها در B_1 یکسان است و طبق خاصیت جایگشت از آن جایی که B_1 مربع لاتین است، پس مربع B هم مربع لاتین می باشد ولی مربع لاتین B با مربع لاتین A متعامد نیست زیرا باز هم درآیه های نظیر به دو درآیۀ یکسانی که در A وجود داشت، در مربع B نیز با هم یکسان می باشند که با فرض مسئله (متعامد بودن دو مربع لاتین A و B) در تناقض است. بنابراین فرض خلف نادرست است و دو مربع لاتین A و B_1 نیز متعامد می باشند.

نکته: اگر دو مربع لاتین، متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می

آید نیز با مربع لاتین دیگر، متعامد است.





۴۵. قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین ریسندگی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ: ابتدا به گونه ای برنامه ریزی می کنیم که این ۵ کارگر در ۵ روز هفته، با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده باشند. پس باید یک مربع لاتین 5×5 طراحی کنیم به طوری که اعداد ۱ تا ۵ نمایانگر ۵ ماشین ریسندگی باشند و هر سطر نشان دهنده یک روز هفته و هر ستون نشان دهنده یک کارگر باشد. (شکل ۱)

اکنون به گونه ای برنامه ریزی می کنیم که این ۵ کارگر در ۵ روز هفته، از هر نوع الیاف دقیقاً یک بار استفاده کنند. از آن جایی که در صورت سوال گفته شده است هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد باید یک مربع لاتین 5×5 طراحی کنیم تا با مربع لاتین A متعامد باشد. اعداد ۱ تا ۵ را نمایانگر ۵ نوع الیاف در نظر بگیریم و هر سطر نشان دهنده یک روز هفته و هر ستون نشان دهنده یک کارگر می باشد. (شکل ۲) حالا اگر در آیه های نظیر از دو مربع لاتین متعامد A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع لاتین 5×5 به شکل زیر خواهیم داشت که می توانیم تمامی اطلاعات هفتگی مربوط به کارگراها، دستگاه ها و الیاف ها را از آن استخراج کنیم. (شکل ۳)

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۲	۳	۴	۵
یکشنبه	۲	۳	۴	۵	۱
دوشنبه = A	۳	۴	۵	۱	۲
سه شنبه	۴	۵	۱	۲	۳
چهارشنبه	۵	۱	۲	۳	۴

شکل (۱)

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۲	۳	۴	۵
یکشنبه	۳	۴	۵	۱	۲
دوشنبه = B	۵	۱	۲	۳	۴
سه شنبه	۲	۳	۴	۵	۱
چهارشنبه	۴	۵	۱	۲	۳

شکل (۲)

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵
یکشنبه	۲۳	۳۴	۴۵	۵۱	۱۲
دوشنبه	۳۵	۴۱	۵۲	۱۳	۲۴
سه شنبه	۴۲	۵۳	۱۴	۲۵	۳۱
چهارشنبه	۵۴	۱۵	۲۱	۳۲	۴۳

شکل (۳)

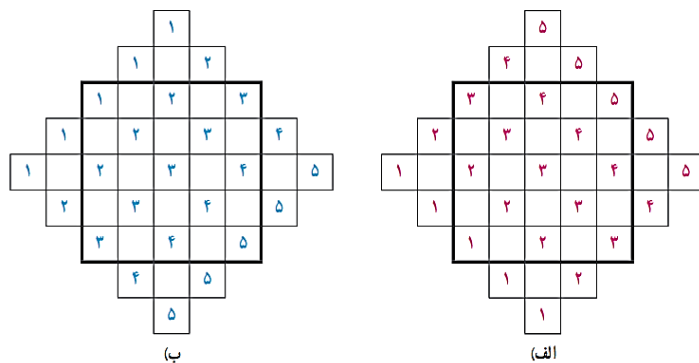




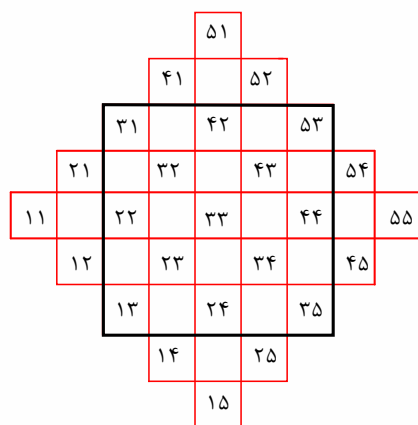
روشی برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه فرد

با انجام مراحل زیر می توانیم دو مربع لاتین 5×5 متعامد به دست آوریم.

(۱) اعداد ۱ تا ۵ را با نظم خاصی که در شکل های الف و ب دیده می شود، می چینیم.



(۲) از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل های الف و ب شکل ج را به دست می آوریم که در آن عدد دو رقمی تکراری وجود ندارد.



(۳) اکنون مربع پر رنگ 5×5 وسط را در نظر بگیرید. می بینیم که دارای ۱۲ خانه بدون عدد است، از طرفی ۱۲ عدد هم بیرون

۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵

این مربع پر رنگ قرار دارند. پس به شکل زیر عمل می کنیم تا مربع مقابل حاصل شود.

الف) هر کدام از چهار مربع سمت چپ را ۵ خانه به سمت راست انتقال می دهیم.

ب) هر کدام از چهار مربع سمت راست را ۵ خانه به سمت چپ انتقال می دهیم.

ج) هر کدام از چهار مربع بالا را ۵ خانه به پایین انتقال می دهیم.

د) هر کدام از چهار مربع پایین را ۵ خانه به بالا انتقال می دهیم.





۴) اکنون مربع لاتین به وجود آمده در مرحله ۳ را به دو مربع لاتین تفکیک می کنیم به طوری که در یکی از اعداد سمت چپ و در دیگری اعداد سمت راست قرار می دهیم. این دو مربع لاتین، متعامد می باشند.

۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵

⇒

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

و

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵





پرسش های تشریحی

۱. به چند طریق می توان ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند، در دو طرف یک میز مستطیل شکل نشاند. هر گاه

(مشابه تمرین کتاب درسی)

بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند؟

۲. تعداد ۷ نهال چنار، ۴ نهال سپیدار و ۳ نهال سرو باید در یک ردیف کاشته شوند به طوری که:

I) نهال های ابتدا و انتهای ردیف چنار باشند.

II) هیچ دو نهال سرو مجاور هم نباشند.

III) هیچ دو نهال سپیدار مجاور هم نباشند.

IV) هر نهال سرو بین یک چنار و یک سپیدار واقع شود.

V) انجام این کار به چند طریق امکان پذیر است؟ (نهال های هم نوع، یکسان محسوب می شوند).

۳. اگر فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می توان نوشت که شامل

(مشابه تمرین کتاب درسی)

دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۴. کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را به چند طریق می توانیم در یک قفسه و در یک ردیف بچینیم، اگر:

(مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) هیچ محدودیتی نباشد.

ب) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند.

ج) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.

د) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۵. به چند طریق می توان ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را در یک ردیف چید به طوری که

دانش آموزان پایه دوازدهم در کنار یکدیگر باشند؟





(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶. با ارقام ۵, ۶, ۷, ۷, ۷, ۸ چه تعداد کد ۶ رقمی می توان نوشت؟

...

۷. چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۲۴۸ با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۸ می توان نوشت؟

...

۸. تعداد جایگشت های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمه DELARAM را بیابید.

...

۹. با ارقام ۸, ۸, ۸, ۳, ۳, ۹ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

...

۱۰. می خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی کد گذاری کرده و هر جعبه را با یک کد شامل ۹

حرف a, a, a, b, c, c, d, d, d از بقیه مجزا کنیم. ما حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

...

۱۱. ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق ۲ نفره و یک اتاق ۳ نفره قرار بگیرند؟

...

۱۲. تعداد جایگشت های حروف کلمه MISSISSIPPI که در آنها هیچ دو حرف S متوالی نباشند را بیابید.

...

۱۳. به چند طریق می توان از ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد و هر گاه بخواهیم:

(مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) به دلخواه انتخاب کنیم.

ب) از هر نوع گل حداقل یک شاخه انتخاب کرده باشیم.

ج) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب شود.

د) از گل سوم انتخاب نشده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب شود.

...

۱۴. مطلوب است تعداد جواب صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر با شرط های داده شده: (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$, $x_i > 0$, $2 \leq i \leq 5$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$, $x_1 > 2$, $x_5 \geq 4$

پ) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$, $x_i \geq 1$, $1 \leq i \leq 5$

ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$, $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 4$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$, $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 4$

ج) $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 30$





۱۵. چند جواب صحیح و نامنفی برای معادله $abc = 3^4 \times 5^3$ وجود دارد؟

۱۶. به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۷. به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که به یکی از آنها دقیقاً ۳ توپ برسد؟

۱۸. به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هر گاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۹. در چند جایگشت از حروف کلمه MOHAMMAD، با حذف هر ۳ حرف M کلمه HODAA به دست می آید؟

۲۰. آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۱. قرار است ۶ مدرس T_1 تا T_6 در ۶ جلسه متوالی در ۶ کلاس C_1 تا C_6 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی کنید.
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۲. دو مربع لاتین مرتبه ۷ بنویسید.
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۳. در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:
(مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند.

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند.

پ) هر راننده هر روز دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

ث) برای این منظور برنامه ریزی کنید.





۲۴. اگر دو مربع لاتین A و B متعامد باشند در این صورت در آیه b_{13} چند است؟ چرا؟

$A =$

۱			
۴	۳		
		۲	

$B =$

		?	
	۱		
			۱
۳			

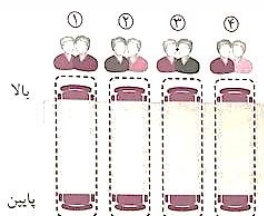




پاسخ پرسش های تشریحی

۱. راه حل ۱: ۴ جفت برادر و ۴ جفت صندلی که روبه روی هم قرار دارند در اختیار داریم. ابتدا برای هر یک از جفت برادرها،

یک جفت صندلی که روبه روی هم قرار دارند را انتخاب می کنیم که به $\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$ حالت امکان پذیر است. از طرفی برای



نشستن هر جفت برادر در هر جفت صندلی، ۲ حالت وجود دارد. بنابراین در کل

$$2^4 \times \binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 384$$

راه حل ۲: ابتدا یکی از ۸ نفر را انتخاب می کنیم و در ردیف بالا در جفت صندلی ۱ قرار می دهیم پس برای صندلی روبه روی آن فقط می توان برادرش را انتخاب کرد. برای صندلی ردیف بالا در جفت صندلی ۲ باید از بین ۶ نفر

باقی مانده یک نفر را انتخاب کرد پس برای صندلی روبه روی آن فقط می توان برادرش را انتخاب کرد. برای صندلی ردیف بالا در

جفت صندلی ۳ باید از بین ۴ نفر باقی مانده یک نفر را انتخاب کرد پس برای صندلی روبه روی آن فقط می توان برادرش را انتخاب

نمود. برای صندلی ردیف بالا در جفت صندلی ۴ باید از بین دو نفر باقی مانده یک نفر را انتخاب کرد پس برای صندلی روبه روی

آن فقط می توان نفر آخر که برادرش هست را انتخاب کرد. پس این عمل را به $\binom{2}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{8}{1} = 384$ طریق می

توان انجام داد.

۲. ابتدا ۷ چنار را در یک ردیف می چینیم. چون ابتدا و انتهای ردیف باید چنار باشد، ۴ نهال سپیدار را در ۶ جایگاه مشخص شده

باید قرار داد تا شرط سوم ارضا شود که به $\binom{6}{4}$ حالت امکان پذیر است.

چنار ○ چنار ○ چنار ○ چنار ○ چنار ○ چنار ○ چنار

برای ارضای شرط دوم و چهارم، به هر ترتیب قرارگیری سپیدارها و چنارها در حالت قبل، ۸ جایگاه برای قرارگیری ۳ نهال سرو

وجود دارد زیرا هر سپیدار بین دو چنار قرار دارد. پس در کل می توان به $\binom{8}{3} \times \binom{6}{4} = 840$ طریق می توان این کار را انجام داد.

۳. از ۴ عضو A دو تا را انتخاب و از ۵ عضو B سه تا را انتخاب می کنیم. این ۵ عدد به ۵! قابلیت جابه جایی دارند. پس در کل به

$$5! \times \binom{5}{3} \times \binom{4}{2} = 7200$$





۴. الف) این ۹ کتاب به ۹! می توانند در کنار هم قرار گیرند.

ب) کتاب های فیزیک را به هم می بندیم و با ۵ کتاب ریاضی به ۶! قابلیت جابه جایی دارند. از طرفی کتاب های فیزیک نیز به ۴! می توانند جابه جا شوند پس در کل به ۴! × ۶! حالت می توان این کار را انجام داد.

ج) ابتدا کتاب های فیزیک را به ۴! در یک ردیف می چینیم سپس ۵ کتاب ریاضی را به ۵! در جایگاه های مشخص شده قرار می دهیم. پس این کار به ۴! × ۵! حالت امکان پذیر است.

○ فیزیک ○ فیزیک ○ فیزیک ○ فیزیک ○

د) این ۳ کتاب خاص را به هم می بندیم و با ۶ کتاب دیگر به ۷! قابلیت جابه جایی دارند. از طرفی ۳ کتاب خاص نیز به ۳! می توانند جابه جا شوند. پس این کار به ۳! × ۷! حالت امکان پذیر است.

۵. ابتدا ۴ دانش آموز دوازدهم را به هم می بندیم و با ۶ دانش آموز یازدهم دیگر به ۷! قابلیت جابه جایی دارند. از طرفی دانش آموزان دوازدهم به ۴! می توانند جابه جا شوند. پس این کار به ۴! × ۷! طریق امکان پذیر است.

۶. طبق قضیه جایگشت با تکرار این عمل به $\frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60$ حالت امکان پذیر است.

۷. این عمل به دو حالت امکان پذیر است:

حالت ۱ رقم صدگان عدد ۲ و دهگان آنها ۵ و ۸ باشند. $۸ = ۴ \times \text{حالت } ۲ \times \text{حالت } ۱$

حالت ۲ رقم صدگان بزرگتر از ۲ باشد. $۸۰ = ۴ \times \text{حالت } ۵ \times \text{حالت } ۴$

بنابراین این عمل به $۸۸ = ۸۰ + ۸$ حالت امکان پذیر است.

۸. این جایگشت سه حرفی دارای دو حالت است:

$$۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$$

حالت ۱: دارای حرف تکراری نباشد. (۶ حرف متمایز داریم)

حالت ۲: دارای حرف تکراری باشد. (حرف A تکراری باشد).

از پنج حرف دیگر یکی را انتخاب می کنیم و این سه حرف که دو تا حرف تکراری دارد به $\frac{3!}{1!}$ قابلیت

$$\binom{5}{1} \times \frac{3!}{2!} = ۱۵$$

جابه جایی دارند.

بنابراین در کل $۱۳۵ = ۱۲۰ + ۱۵$ جایگشت سه حرفی وجود دارد.



۹. باید حالت های مختلف را تفکیک کنیم و همه آنها را جداگانه به دست آوریم.

حالت ۱ با ارقام ۳,۸,۸,۸ عدد را بسازیم که تعداد حالت ها برابر $\frac{4!}{3!} = 4$ تا می شود.

حالت ۲ با ارقام ۹,۸,۸,۸ عدد را بسازیم که تعداد حالت ها برابر $\frac{4!}{3!} = 4$ تا می شود.

حالت ۳ با ارقام ۳,۳,۸,۸ عدد را بسازیم که تعداد حالت ها برابر $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ تا میشود.

حالت ۴ با ارقام ۹,۳,۸,۸ عدد را بسازیم که تعداد حالت ها برابر $\frac{4!}{2!} = 12$ تا میشود.

حالت ۵ با ارقام ۹,۳,۳,۸ عدد را بسازیم که تعداد حالت ها برابر $\frac{4!}{2!} = 12$ تا میشود.

پس در کل $4 + 4 + 6 + 12 + 12 = 38$ عدد چهار رقمی می توان نوشت.

۱۰. طبق قضیه جایگشت با تکرار حداکثر $\frac{9!}{3! \times 1! \times 2! \times 2!} = 5040$ تا کد ۹ حرفی می توان نوشت.

۱۱. این عمل به $\binom{7}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{3} = 210$ حالت امکان پذیر است.

۱۲. ابتدا حرف های S را در نظر نمی گیریم و جایگشت حروف دیگر را به دست می آوریم که ۷ حرف دیگر به $\frac{7!}{1! \times 4! \times 2!} = 105$

می توانند جا شوند. برای آن که هیچ دو حرف S در کنار هم نباشند باید از ۸ جایگاه مشخص شده در مثال زیر ۴ تا را انتخاب کنیم.

○ M ○ I ○ I ○ I ○ P ○ P ○ I ○

پس این عمل به $105 \times \binom{8}{4} = 7350$ حالت امکان پذیر است.

۱۳. فرض کنید از پنج نوع گل موجود به ترتیب X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 شاخه انتخاب کنیم. داریم:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 11$$

الف) $X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 5 \Rightarrow$ تعداد جواب ها $= \binom{15}{4} = 1365$

ب) $X_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, 5 \Rightarrow$ تعداد جواب ها $= \binom{11-5+4}{4} = \binom{10}{4} = 210$

ج) $X_2 \geq 2, X_5 > 3, X_1, X_3, X_4 \geq 0 \Rightarrow$ تعداد جواب ها $= \binom{11-2-4+4}{4} = \binom{9}{4} = 126$

د) $X_2 = 0, X_5 \geq 5, X_1, X_3, X_4 \geq 0 \Rightarrow X_1 + X_3 + X_4 + X_5 = 11$

$\Rightarrow$ تعداد جواب ها $= \binom{11-5+3}{3} = \binom{9}{3} = 84$





۱۴. الف)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{10-4+4}{4} = \binom{10}{4} = 210$$

ب)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \\ x_1 \geq 3, x_5 \geq 4, x_2, x_3, x_4, x_6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{12-3-4+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

پ)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{11-5+4}{4} = \binom{10}{4} = 210$$

ت) اگر $x_2 \geq 3$ باشد در این صورت معادله دارای جواب نیست. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} &\begin{cases} x_2 = 0, x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{7+2}{2} = 36 \\ &\begin{cases} x_2 = 1, x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{6+2}{2} = 28 \\ &\begin{cases} x_2 = 2, x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{5+2}{2} = 21 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تعداد کل جواب ها} = 36 + 28 + 21 = 85$$

ث) راه حل ۱: از آن جایی که $0 \leq \sqrt{x_2} \leq 3$ است و $\sqrt{x_2}$ باید عددی حسابی باشد بنابراین x_2 می تواند برابر صفر یا ۱ یا ۴ یا ۹ باشد. داریم:

$$\begin{cases} x_2 = 0, x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{3+2}{2} = 10$$

$$\begin{cases} x_2 = 1, x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{2+2}{2} = 6$$

$$\begin{cases} x_2 = 4, x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{2+1}{2} = 3$$

$$\begin{cases} x_2 = 9, x_1, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{2+0}{2} = 1$$



بنابراین در کل $1 + 3 + 6 + 10 = 20$ جواب صحیح و نامنفی وجود دارد.

راه حل ۲: از آنجایی که $\sqrt{x_r}$ عددی صحیح است بنابراین x_r باید مربع کامل باشد پس $x_r = k^2$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{x_r} + x_r + x_f = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + k + x_r + x_f = 3 \\ x_1, k, x_r, x_f \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح غیر منفی} = \binom{3+3}{3} = 20$$

(ج) ابتدا از عدد ۶ فاکتور می گیریم. داریم:

$$6 \left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_r}{2} + x_r \right) = 30 \Rightarrow \frac{x_1}{3} + \frac{x_r}{2} + x_r = 5$$

برای آن که جواب های صحیح به دست آید بدیهی است $x_1 = 3k_1$ و $x_r = 2k_2$ می باشند. چون $x_1, x_r \geq 0$ پس $k_1, k_2 \geq 0$

$$k_1 + k_2 + x_r = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} = \binom{5}{2} = 21$$

۱۵. بدیهی است در تجزیه استاندارد اعداد a, b و c فقط عامل های ۳ و ۵ وجود دارد. داریم:

$$a = 3^{\alpha_1} \times 5^{\beta_1}, b = 3^{\alpha_2} \times 5^{\beta_2}, c = 3^{\alpha_3} \times 5^{\beta_3}$$

$$abc = 3^4 \times 5^3 \Rightarrow 3^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \times 5^{(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} = 3^4 \times 5^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 & (\alpha_i \geq 0) \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3 & (\beta_i \geq 0) \end{cases}$$

پس باید جواب های صحیح و نامنفی دستگاه بالا را به دست آوریم. جواب هر معادله را جداگانه محاسبه کرده و طبق اصل

$$\text{ضرب در هم ضرب می کنیم. پس در کل } \binom{4+2}{2} \binom{3+2}{2} = 150$$

۱۶. اگر x_1, x_2, x_3 به ترتیب تعداد توپ هایی باشد که نفرات اول تا سوم می رسد، داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{5+2}{2} = 21$$

۱۷. باید جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ را بیابیم به طوری که یکی از x_i ها برابر ۳ باشد که

به $\binom{4}{1}$ حالت می توان x_i موردنظر را پیدا کرد. اکنون ۲ توپ باقی مانده باید بین سه نفر دیگر توزیع شود. به

طور مثال فرض کنید $x_1 = 3$ باشد در این صورت $x_2 + x_3 + x_4 = 2$ می باشد که تعداد جواب های صحیح

و نامنفی آن برابر $\binom{4}{2}$ است. پس بنابر اصل ضرب به $\binom{4}{1} \times \binom{4}{2} = 24$ حالت می توان این توزیع را انجام داد.





۱۸. اگر x_1 و x_2 و x_3 و x_4 به ترتیب تعداد توپ هایی که باشد که به این ۴ نفر می رسد، داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{8-4+3}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

۱۹. باید مطابق شکل روبه رو، ۳ حرف M را در ۶ جایگاه بین حروف کلمه HODAA قرار دهیم.

۱ H ۲ O ۳ D ۴ A ۵ A ۶

اگر x_1 تا x_6 تعداد M ها در جایگاه های ۱ تا ۶ باشد، داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{3+5}{5} = 56$$

۲۰. خیر زیرا در صورتی که در مربع اولیه، دو درآیه یکسان وجود داشته باشد با اعمال جایگشت در جایگاه های نظیر به این دو درآیه در مربع دیگر نیز درآیه یکسان وجود خواهد داشت پس این دو مربع لاتین نمی تواند متعامد باشند.

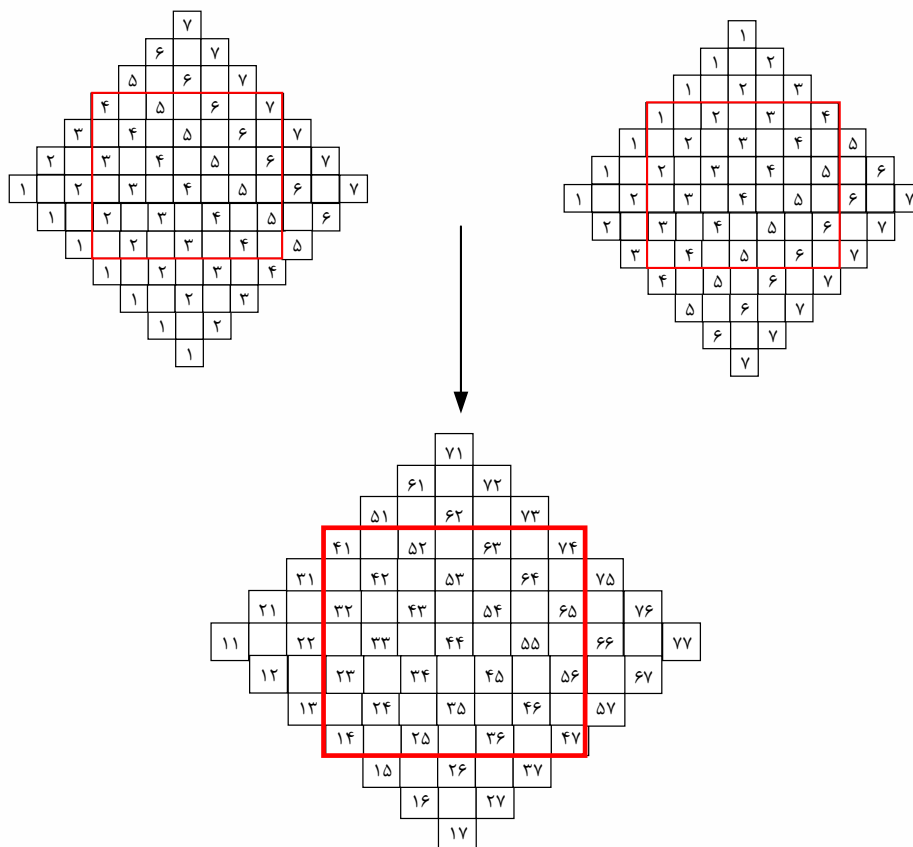
۲۱. باید یک مربع لاتین مرتبه ۶ طراحی کنیم تا هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس داشته باشد و تداخل در برنامه ۶ مدرس رخ ندهد.

جلسه / کلاس	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
C_1	T_1	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2
C_2	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_6
C_3	T_3	T_2	T_1	T_6	T_5	T_4
C_4	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1
C_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_6	T_5
C_6	T_2	T_1	T_6	T_5	T_4	T_3





۲۲. از مراحل ۴ گانه در پایان درسنامه استفاده می کنیم.



اکنون مرحله سوم و چهارم را با هم اجرا می کنیم.

۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴
۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷

⇒

۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

و

۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

۲۳. ابتدا به گونه ای برنامه ریزی می کنیم که این ۷ راننده در ۷ روز هفته، با هر ماشین دقیقاً یک بار رانندگی کرده باشند. پس

باید یک مربع لاتین 7×7 طراحی کنیم به طوری که اعداد ۱ تا ۷ نمایانگر ۷ ماشین مختلف باشند و هر سطر نشان دهنده یک

روز هفته و هر ستون نشان دهنده یک کارگر باشد. (شکل ۱)

حالا به گونه ای برنامه ریزی می کنیم که این ۷ راننده در ۷ روز هفته، در هر مسیر دقیقاً یک بار رانندگی کرده

باشد. از آنجایی که باید هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود باید یک مربع لاتین 7×7

طراحی کنیم تا با مربع لاتین A متعامد باشد. اعداد ۱ تا ۷ نمایانگر ۷ مسیر مختلف در نظر می گیریم و هر سطر

نشان دهنده یک روز هفته و هر ستون نشان دهنده یک راننده می باشد. (شکل ۲)





	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
شنبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
یکشنبه	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
دوشنبه	۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
سه شنبه = A	۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
چهارشنبه	۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
پنج شنبه	۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
جمعه	۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶

شکل (۱)

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
شنبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
یکشنبه	۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
دوشنبه	۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
سه شنبه = B	۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶
چهارشنبه	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
پنج شنبه	۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
جمعه	۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵

شکل (۲)

اکنون اگر درآیه های نظیر از دو مربع لاتین متعامد A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع لاتین 7×7 به شکل زیر خواهیم داشت که می توانیم اطلاعات هفتگی مربوط به راننده ها، ماشین ها و مسیرها را از آن استخراج کنیم. (شکل ۳)

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
شنبه	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶	۷۷
یکشنبه	۲۳	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۱	۱۲
دوشنبه	۳۵	۴۶	۵۷	۶۱	۷۲	۱۳	۲۴
سه شنبه	۴۷	۵۱	۶۲	۷۳	۱۴	۲۵	۳۶
چهارشنبه	۵۲	۶۳	۷۴	۱۵	۲۶	۳۷	۴۱
پنج شنبه	۶۴	۷۵	۱۶	۲۷	۳۱	۴۲	۵۳
جمعه	۷۶	۱۷	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۵

شکل (۳)





۲۴. چون A جفت متعامد دارد درآیه های a_{11} و a_{22} و a_{33} در می یابیم $a_{34} = 4$ است. پس مربع A به صورت مقابل تکمیل می شود.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

از طرفی بدیهی است $b_{11} = b_{44} = 1$ زیرا در ستون اول فقط b_{11} می تواند برابر ۱ باشد. از آن جایی که درآیه های $a_{41} = a_{34} = a_{33} = a_{14} = 3$ پس از بین b_{14} و b_{33} یکی ۲ و دیگری ۴ می باشد. همچنین $b_{11} = 1$ پس b_{13} فقط می تواند برابر ۳ باشد.





پرسش های چهار گزینه ای

۱. با ارقام ۵, ۹, ۸, ۳, ۱, ۰ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۱۰۰ (۳) ۹۰ (۴) ۸۰

۲. با ارقام ۵, ۹, ۸, ۳, ۱, ۰ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که حاصل ضرب ارقام آن زوج باشد؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۴۸ (۳) ۶۴ (۴) ۷۶

۳. چند عدد سه رقمی می توان نوشت که مجموع ارقام آن ها برابر ۶ شود؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۴. با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۳, ۲, ۱ چند عدد هفت رقمی می توان ساخت به طوری که ارقام فرد و زوج در آنها یک در میان باشند؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴) ۱۲

۵. با حروف کلمه ARTICLE چند کلمه هفت حرفی می توان نوشت به طوری که حروف صدا دار به

ترتیب حروف الفبا در این کلمه قرار گرفته باشند؟

- (۱) ۸۴۰ (۲) ۱۰۰۸ (۳) ۱۲۶۰ (۴) ۵۰۴





۶. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت به طوری که در هر یک از آنها رقم ۳ دقیقاً یک بار و هر یک از ارقام ۲ و ۴ حداقل یک بار قرار داشته باشند؟

(۱) ۴۸ (۲) ۳۶ (۳) ۶۰ (۴) ۵۴

۷. با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

(۱) ۴۰ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴) ۳۸

۸. ۶ جفت کفش داریم. به چند طریق می توان ۴ لنگه از این کفش ها را انتخاب کرد به طوری که فقط یک جفت در بین آنها باشد؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۶۰ (۴) ۱۸۰

۹. با حروف کلمه «انزجار» چند کلمه سه حرفی می توان ساخت؟

(۱) ۹۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۲ (۴) ۸۴





۱۰. به چند طریق می توان ۶ کتاب ریاضی مشابه و ۳ کتاب فیزیک مشابه را در یک ردیف کنار هم چید، به طوری که

هیچ دو کتاب فیزیکی در کنار هم نباشند؟

۲۴ (۱) ۳۵ (۲) ۲۰ (۳) ۴۸ (۴)

۱۱. به چند طریق می توان ۳ کتاب ریاضی مشابه، ۳ کتاب فیزیک مشابه و ۲ کتاب شیمی مشابه را در یک ردیف چید،

به طوری که هیچ دو کتاب شیمی در کنار هم نباشند؟

۳۶۰ (۱) ۳۹۰ (۲) ۴۲۰ (۳) ۴۵۰ (۴)

۱۲. از بین اعداد طبیعی تک رقمی به چند طریق می توان ۳ عدد انتخاب کرد به طوری که عدد ۶ را شامل شود و فاقد

اعداد اول باشد؟

۶ (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)

۱۳. با شش عدد ۲ و سه عدد ۳ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟

۷۸ (۱) ۵۶ (۲) ۱۲۰ (۳) ۸۴ (۴)





فصل سوم: ترکیبیات

۱۴. با شش عدد ۲ و سه عدد ۳ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت به طوری که هیچ دو عدد ۳ در کنار هم نباشند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۵۶ (۳) ۳۵ (۴) ۴۵

۱۵. با ارقام ۸, ۸, ۴, ۴, ۴, ۱, ۰ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۵۰ (۳) ۷۵ (۴) ۱۰۰

۱۶. به چند طریق می توان هر یک از ارقام ۵, ۴, ۳, ۲, ۱ را در یکی از ۶ خانه هم ردیف به تصادف قرار داد به طوری که این

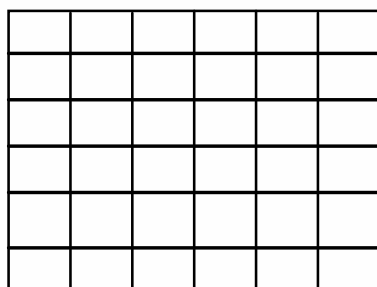
ارقام در خانه های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار بگیرند؟

- (۱) ۹۶ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۱۹۲

۱۷. به چند طریق امکان دارد در یک سال کیسه ۵۳ تا جمعه داشته باشیم؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸. در شکل مقابل چند مستطیل وجود دارد؟



(۱) ۴۸۱

(۲) ۴۶۱

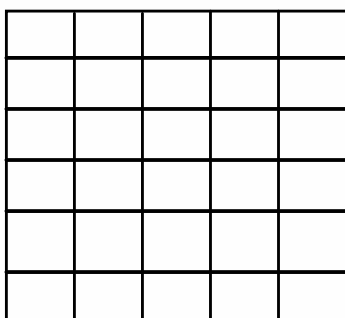
(۳) ۴۲۱

(۴) ۴۴۱





۱۹. در شکل مقابل چند مربع وجود دارد؟



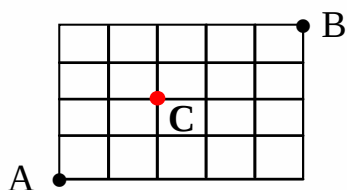
۳۵ (۱)

۴۵ (۲)

۵۵ (۳)

۶۵ (۴)

۲۰. در شکل مقابل به چند طریق با کوتاه ترین مسیر از A به B می رسمیم به طوری که از C عبور کرده باشیم؟



۴۰ (۱)

۶۰ (۲)

۸۰ (۳)

۲۰ (۴)

۲۱. به چند طریق امکان دارد از بین ۶ نفر همکلاسی، ۴ نفر خاص در یک روز هفته متولد شده باشند؟

۳۱۵ (۴)

۳۴۳ (۳)

۲۹۴ (۲)

۲۵۲ (۱)

۲۲. به چند طریق امکان دارد از بین ۵ نفر همکلاسی، ۳ نفر خاص در یک ماه از سال متولد شده باشند؟

۱۵۸۱ (۴)

۱۳۳۱ (۳)

۱۴۵۲ (۲)

۱۳۲۰ (۱)





۲۳. به چند طریق امکان دارد روز تولد ۵ همکلاسی در ۵ روز متوالی باشد؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۴۸۰

۲۴. با ارقام ۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۱۲ (۳) ۱۱۶ (۴) ۱۱۴

۲۵. با ارقام ۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

- (۱) ۵۲ (۲) ۵۵ (۳) ۵۹ (۴) ۵۴

۲۶. با ارقام ۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که مجموع ارقام آنها عددی فرد شود؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۵۲ (۳) ۵۴ (۴) ۶۰

۲۷. از میان ۴ ایرانی، ۵ فرانسوی و ۳ ژاپنی دو نفر به تصادف انتخاب می کنیم. به چند طریق امکان دارد این دو نفر از

دو ملیت متفاوت باشند؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۲ (۳) ۴۵ (۴) ۴۷





۲۸. از بین ۶ داوطلب گروه ریاضی و ۴ داوطلب گروه تجربی، به طور تصادفی ۴ نفر را انتخاب می کنیم به چند طریق

امکان دارد حداقل ۲ نفر از آنان از گروه ریاضی باشند؟

۱۷۵ (۱) ۱۷۰ (۲) ۱۸۵ (۳) ۱۹۰ (۴)

۲۹. به چند طریق میتوان ۳ کتاب ریاضی سال یازدهم و ۳ کتاب فیزیک سال یازدهم را در یک قفسه چید؟

۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۸۰ (۴)

۳۰. چهار نفر به نام های a, b, c, d در یک اتاق حضور دارند به چند طریق امکان دارد روز تولد فرد a و فرد b متوالی

باشد؟

۱۴۷ (۱) ۸۸۲ (۲) ۲۹۴ (۳) ۵۸۸ (۴)

۳۱. ۲ پسر و ۳ دختر روی ۵ صندلی از ده صندلی به شماره های ۱ تا ۱۰ می نشینند. به چند طریق امکان دارد که پسرها

حتماً روی صندلی با شماره های عدد اول بنشینند؟

۱۰۰۸ (۱) ۲۰۱۶ (۲) ۴۰۳۲ (۳) ۳۰۲۴ (۴)





۳۲. سه زوج در یک ردیف می ایستند. به چند طریق امکان دارد هر فرد در کنار همسر خود باشد؟

(۱) ۱۹۲ (۲) ۹۶ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

۳۳. از بین ۵ زوج ۴ نفر را انتخاب می کنیم. به چند طریق امکان دارد فقط یک زوج در بین ۴ نفر باشند؟

(۱) ۲۴۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۶۰ (۴) ۱۸۰

۳۴. با ارقام ۷, ۴, ۲, ۲, ۰ به چند طریق می توان عدد ۵ رقمی نوشت به طوری که دو عدد ۲ در کنار هم باشند؟

(۱) ۳۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۵۴

۳۵. در کیسه ای ۳ توپ زرد و ۵ توپ سبز وجود دارد و ۴ توپ از آن بیرون می کشیم. به چند طریق امکان دارد در

بین این توپ ها هم توپ زرد و هم توپ سبز وجود داشته باشد؟

(۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۶۵ (۴) ۶۰





۳۶. در ظرفی ۴ مهره قرمز که شماره های ۱ تا ۴ بر روی آن ها حک شده است و ۵ مهره آبی که شماره های ۱ تا ۵ بر روی آن ها حک شده است قرار دارند. به چند طریق می توان ۶ مهره از این ظرف بیرون آورد و در یک ردیف چید به طوری که ۳ مهره قرمز ۳ مهره آبی یک در میان باشند؟

(۱) ۱۴۴۰ (۲) ۲۸۸۰ (۳) ۲۱۶۰ (۴) ۲۵۹۲

۳۷. ۴ پسر و ۲ دختر را به چند طریق می توان دور یک میز چید به طوری که دو دختر در کنار هم باشند؟

(۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۴۰

۳۸. به چند طریق می توان با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۸ یک عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام و بزرگ تر از ۵۰۰ نوشت؟

(۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۴۸ (۴) ۳۶

۳۹. در ظرفی ۳ مهره سیاه با شماره های ۱ تا ۳ و ۳ مهره سفید با شماره های ۱ تا ۳ قرار دارند. به چند طریق می توان

۶ مهره از این ظرف خارج کرد و در ۳ کیسه با شماره های ۱ تا ۳ قرار داد به طوری که در هر کیسه یک مهره سیاه و

یک مهره سفید قرار بگیرد؟

(۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴





۴۰. به چند طریق می توان از بین ۶ نفر، ۳ نفر را انتخاب کرد به طوری که از بین دو فرد خاص a و b حداقل یکی در بین این ۳ نفر باشند؟

۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴)

۴۱. به چند طریق امکان دارد از بین ۳ نفر، حداقل دو نفر در یک روز هفته متولد شده باشند؟

۱۱۹ (۱) ۱۲۶ (۲) ۱۳۳ (۳) ۱۴۰ (۴)

۴۲. چند عدد سه رقمی بزرگ تر از ۶۰۰ وجود دارد که فقط دارای دو رقم یکسان باشد؟

۱۰۷ (۱) ۱۰۸ (۲) ۱۱۲ (۳) ۱۱۱ (۴)

۴۳. به چند طریق می توان حروف کلمه Ehsani را به تصادف کنار یکدیگر قرار داد به طوری که حروف صدadar به ترتیب حروف الفبا قرار نگرفته باشند؟

۴۸۰ (۱) ۶۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۴۰ (۴)





۴۴. به چند طریق می توان اعداد ۴,۴,۴,۳,۳,۲,۲ را در کنار هم قرار داد به طوری که هیچ دو عدد ۴ در کنار هم نباشند؟

- (۱) ۳۵۰ (۲) ۷۰۰ (۳) ۱۰۵۰ (۴) ۲۱۰۰



۴۵. با ارقام ۷,۶,۵,۴,۳,۲,۱,۰ چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز می توان ساخت به طوری که هر کدام از آنها شامل

رقم ۱ باشد؟

- (۱) ۶۳۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۹۶۰ (۴) ۷۵۰



۴۶. چند عدد چهار رقمی وجود دارد که مجموع دو رقم اول و آخر آن ۱۲ و مجموع دو رقم دیگر آن ۹ باشد؟

- (۱) ۸۲ (۲) ۶۴ (۳) ۷۰ (۴) ۷۲



۴۷. در همایشی قرار است ۴ نفر سخنرانی کنند، به چند طریق امکان دارد فرد خاص a دقیقاً بعد از فرد خاص b سخنرانی کند؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴





۴۸. یک ساختمان ۵ طبقه را به چند طریق می توان با ۴ رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو

طبقه مجاوری هم رنگ نباشند؟

(۱) ۷۶۸ (۲) ۲۴۳ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۳۲۴

۴۹. چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت به طوری که ارقام آن از چپ به راست صعودی باشند؟

(۱) ۸۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۶ (۴) ۱۰۸

۵۰. چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت به طوری که ارقام آن از راست به چپ صعودی باشند؟

(۱) ۸۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۶ (۴) ۱۰۸

۵۱. تعداد اعداد سه رقمی که ارقام مجاورشان متمایز باشند کدام است؟

(۱) ۷۲۹ (۲) ۵۰۴ (۳) ۸۱۰ (۴) ۵۷۶





۵۲. ۴ نفر مهندس برق، ۴ نفر مهندس مکانیک، ۴ نفر مهندس عمران و ۴ نفر مهندس نفت را به جشنی دعوت کرده

ایم. به چند طریق می توان ۳ نفر از میان آن ها انتخاب کرد به طوری که از هر رشته حداکثر یک نفر انتخاب شود؟

- (۱) ۱۹۲ (۲) ۳۸۴ (۳) ۲۵۶ (۴) ۵۱۲

۵۳. تعداد جایگشت های حروف کلمه KAMALI به طوری که A ها در کنار هم نباشند کدام است؟

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۴۰

۵۴. معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۹۶ (۳) ۷۲ (۴) ۱۲۰

۵۵. معادله $x + y + z = 5$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴) ۶

۵۶. چند دسته گل ۹ تایی از ۵ نوع گل می توان ساخت به طوری که مجموعاً از نوع سوم و چهارم، ۵ شاخه گل داشته

باشیم؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۱۲۰





۵۷. یک رستوران سه نوع ساندویچ A و B و C می فروشد. پسری میخواهد ۶ ساندویچ بخرد و از هر

ساندویچ هر چند تا که بخواهد می تواند بخرد. او به چند روش می تواند ساندویچ ها را انتخاب کند؟

۱۰ (۱) ۲۱ (۲) ۲۸ (۳) ۳۶ (۴)

۵۸. معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $x_i > i - 1$ باشد؟

($i = 1, 2, \dots, 6$)

۵۶ (۱) ۹۶ (۲) ۸۴ (۳) ۳۶ (۴)

۵۹. ۸ کبوتر را به چند طریق می توان در ۴ لانه متمایز قرارداد به طوری که هیچ لانه ای خالی نماند؟

۲۰ (۱) ۳۵ (۲) ۵۶ (۳) ۸۴ (۴)

۶۰. چند جواب طبیعی برای نامعادله $5 < x + y + z < 8$ وجود دارد؟

۲۱ (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۲۵ (۴)





۶۱. به چند طریق می توان ۱۲ گوی یکسان را بین ۵ نفر تقسیم کرد به طوری که به نفرات اول و دوم و سوم و ۹ گوی و

به نفرات چهارم و پنجم ۳ گوی برسد در حالی که به هر نفر حداقل یک گوی رسیده باشد؟

۵۶ (۱) ۷۲ (۲) ۹۰ (۳) ۱۱۰ (۴)

۶۲. به چند طریق می توان ۳ خودکار مشابه و ۶ مداد مشابه را بین ۵ دانش آموز تقسیم کرد به طوری که به هر دانش

آموز حداقل یک مداد برسد؟

۱۲۵ (۱) ۱۷۵ (۲) ۱۵۰ (۳) ۲۰۰ (۴)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_4 + x_5 = 10 \end{cases}$$

۶۳. تعداد جواب های صحیح و نامنفی دستگاه مقابل کدام است؟

۲۹۷ (۱) ۲۳۱ (۲) ۲۵۳ (۳) ۳۰۸ (۴)

۶۴. معادله $x + y + z = ۱۳$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $x \geq ۳$ و $y \geq ۵$ باشد؟

۱۵ (۱) ۲۱ (۲) ۱۰ (۳) ۳۶ (۴)





۶۵. معادله $x + y + z = 25$ در بازه $(5, +\infty)$ چند جواب صحیح دارد؟

(۴) ۵۶

(۳) ۲۱

(۲) ۴۵

(۱) ۳۶

۶۶. به چند طریق می توان ۶ کارت یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که به یکی از آن ها دقیقاً ۲ کارت برسد؟

(۴) ۶۰

(۳) ۵۶

(۲) ۵۲

(۱) ۴۸

۶۷. معادله $x_1^4 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

(۴) ۱۰۰

(۳) ۹۰

(۲) ۷۲

(۱) ۸۱

۶۸. تعداد نقاط بامختصات صحیح روی خط $y = -x + 11$ واقع در ربع اول دستگاه مختصات کدام است؟

(۴) ۹

(۳) ۱۰

(۲) ۱۱

(۱) ۱۲





۶۹. نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- (۱) ۶۱۵ (۲) ۵۷۵ (۳) ۴۹۵ (۴) ۵۴۵

۷۰. تعداد جملات بسط $(x + y + z + t)^n$ برابر با ۵۶ است. n کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۱. ضریب جمله xy^5zt^3 در بسط $(x + y + z + t)^{10}$ کدام است؟

- (۱) ۴۰۵۰ (۲) ۵۰۴۰ (۳) ۶۰۵۰ (۴) ۵۰۶۰

۷۲. در بسط $(x + y + z + t)^{10}$ چند جمله وجود دارد که فاقد t باشد؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۵۵ (۳) ۷۸ (۴) ۶۶

۷۳. نامعادله $1228 \leq (x + y)^5 \leq 28$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴





۷۴. تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ کدام است؟

- (۱) ۷۸ (۲) ۸۷ (۳) ۱۰۶ (۴) ۱۰۹

۷۵. معادله $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- (۱) ۲۱۵ (۲) ۲۲۵ (۳) ۲۳۰ (۴) ۲۲۰

۷۶. معادله $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 35$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۱۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۲۴۰

۷۷. دو نقطه $A(12, 0)$ و $B(0, 12)$ و نقطه $O(0, 0)$ تشکیل مثلث AOB را میدهند. چند نقطه با مختصات صحیح

درون یا روی این مثلث وجود دارد؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۷۸ (۳) ۹۱ (۴) ۱۰۵





۷۸. دو نقطه با مختصات $A(12, 0)$ و $B(0, 12)$ را به هم وصل می کنیم. چند نقطه با مختصات صحیح روی پاره خط

AB وجود دارد؟

- ۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۱ (۴)

۷۹. معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $1 \leq x_i \leq 8$ (باشد؟ $i = 1, 2, 3$)

- ۴۵ (۱) ۳۶ (۲) ۲۸ (۳) ۲۱ (۴)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq -1 \end{cases}$$

۸۰. تعداد جواب های صحیح معادله مقابل کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۳۳ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴)

۸۱. نامعادله $x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 9$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- ۱۱۰ (۱) ۱۰۶ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۰۳ (۴)





۸۲. معادله $x_1^3 + x_2 + x_3 = 11$ چند جواب صحیح دارد به طوری که $x_1 \geq 1$ و $x_2 \geq 1$ و $x_3 \geq 0$ باشد؟

(۴) ۲۴

(۳) ۲۱

(۲) ۲۵

(۱) ۲۲

۸۳. معادله $x_1^4 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(۴) ۱۱۵

(۳) ۱۱۰

(۲) ۱۰۵

(۱) ۱۰۰

۸۴. معادله $4x + y + z = 26$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(۴) ۶۶

(۳) ۶۰

(۲) ۶۱

(۱) ۶۵

۸۵. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x + y + z + t = 13$ به طوری که $x \geq 2$ و $y \geq 3$ و $z > 1$ و $t > a$ باشد برابر با ۳۵ است. مقدار a کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۴

(۲) ۱

(۱) ۲

۸۶. مجموع ضرایب بسط $(2x^3 + y - z)^6$ کدام است؟

(۴) ۷۰

(۳) ۶۴

(۲) ۳۲

(۱) ۳۵





۸۷. مجموع ضرایب بسط $(x + y)^5$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۳۰ (۴)

۸۸. تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴)

۸۹. با ارقام ۷, ۶, ۵, ۳, ۲, ۲, ۲, ۲ چند عدد هشت رقمی می توان نوشت به طوری که با حذف ارقام ۲ آن، عدد چهار رقمی

۶۷۵۳ باقی بماند؟

- ۷۰ (۱) ۳۵ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۴۰ (۴)

۹۰. با حروف کلمه «اشتغال» چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت به طوری که که حروف «الف» یک در میان ظاهر شود؟

- ۲۱۶ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۷۲ (۴)

۹۱. با حروف a, b, c چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت به طوری که از چپ به راست به ترتیب حروف

الفبا قرار گرفته باشند؟ (تکرار مجاز است)

- ۱۸ (۱) ۲۱ (۲) ۲۴ (۳) ۲۸ (۴)





۹۲. با ارقام ۶, ۳, ۲ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت به طوری که ارقام از چپ به راست نزولی باشند؟

(تکرار مجاز است)

۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)

۹۳. معادله $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴)

۹۴. معادله $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۳۰ (۱) ۳۶ (۲) ۲۸ (۳) ۴۵ (۴)

۹۵. معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \sqrt{x_5} = 3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱۵ (۱) ۵۶ (۲) ۴۵ (۳) ۳۵ (۴)

۹۶. معادله $2x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 56$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱۵ (۱) ۲۱ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴)





۹۷. معادله $abc = 2^2 \times 5^4$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۹۰ (۴)

۷۵ (۳)

۶۰ (۲)

۴۵ (۱)



۹۸. اگر در یک مربع 4×4 درآیه های $a_{۲۴} = a_{۱۳} = ۳$ و $a_{۱۴} = ۱$ و $a_{۴۱} = ۴$ ، به چند طریق می توان آن را به مربعی

لاتین تبدیل کرد؟

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)



۹۹. اگر در یک مربع لاتین مرتبه ۴ در آیه $a_{۱۱} = ۲$ در این صورت مجموع در آیه های سطر دوم کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)



۱۰۰. اگر در یک مربع لاتین مرتبه ۴ در آیه های $a_{۱۱} = ۴$ و $a_{۲۳} = a_{۳۴} = ۲$ و $a_{۴۳} = ۱$ در این صورت مجموع در آیه های

$a_{۲۲}$ و $a_{۳۱}$ کدام نمی تواند باشد؟

۲ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)





۱۰۱. اگر در یک مربع لاتین مرتبه ۵ درآیه های $a_{۱۳} = a_{۲۱} = ۳$ و $a_{۲۲} = a_{۵۵} = ۲$ و $a_{۱۴} = ۴$ و $a_{۳۱} = ۱$ و

$a_{۴۵} = ۵$ در این صورت مجموع درآیه های $a_{۳۳}$ و $a_{۴۴}$ کدام نمی تواند باشد؟

(۱) ۷

(۲) ۸

(۳) ۶

(۴) ۵

۱۰۲. در یک مربع لاتین مرتبه ۵ چند حالت قرارگیری برای پنج عدد ۲ وجود دارد؟

(۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰

۱۰۳. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۴ دو درآیه که دارای اعداد یکسان هستند را

انتخاب کرد؟

(۱) ۴۲ (۲) ۳۶ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۱۰۴. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۴ دو درآیه که دارای اعداد متمایز هستند را انتخاب کرد؟

(۱) ۲۸ (۲) ۹۶ (۳) ۷۲ (۴) ۱۲۰

۱۰۵. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۵ دو درآیه که دارای اختلاف ۲ واحد می باشند را انتخاب کرد؟

(۱) ۵۰ (۲) ۷۵ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۲۵





۱۰۶. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۶ دو درآیه که دارای اختلاف ۲ واحد باشند را انتخاب کرد؟

- (۱) ۱۰۸ (۲) ۷۲ (۳) ۹۰ (۴) ۱۴۴

۱۰۷. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۵ دو درآیه که دارای مجموع ۵ می باشند را انتخاب کرد؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۷۵ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۲۵

۱۰۸. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۶ دو درآیه که دارای مجموع ۶ می باشند را انتخاب کرد؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۸۷ (۳) ۵۱ (۴) ۶۳

۱۰۹. با اعمال جایگشت اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ از مربع لاتین A به ترتیب با اعداد ۲، ۱، ۳، ۴ مربع B حاصل شده است. اگر در

مربع A درآیه های $a_{11} = a_{23} = 3$ و در مربع B درآیه های $b_{21} = 4$ و $b_{33} = 2$ و $b_{44} = 3$ باشند در این صورت

مجموع درآیه های a_{13} و a_{14} و a_{32} کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۵





۱۱۰. با اعمال جایگشت اعداد ۱, ۲, ۳, ۴ از مربع لاتین A به ترتیب با اعداد ۲, ۱, ۳, ۴ مربع B حاصل شده است. اگر

$a_{11} = 1$ و $a_{21} = a_{12} = 4$ و $a_{31} = a_{13} = 3$ و $a_{41} = a_{14} = 2$ در این صورت مقدار $b_{34} + b_{24}$ کدام نمی

تواند باشد؟

(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴

۱۱۱. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۵ دو درآیه که در یک سطر باشند را انتخاب کرد به طوری که

حاصل ضرب آنها کمتر از ۱۰ باشد؟

(۴) ۴۰

(۳) ۳۵

(۲) ۳۰

(۱) ۲۵

۱۱۲. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۵ دو درآیه که در یک سطر یا یک ستون باشند را انتخاب کرد

به طوری که حاصل ضرب آن ها کمتر از ۶ باشد؟

(۴) ۵۰

(۳) ۴۵

(۲) ۳۵

(۱) ۴۰

۱۱۳. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۶ دو درآیه که در یک سطر یا یک ستون باشند را انتخاب کرد

به طوری که مجموع آن ها برابر ۶ باشد؟

(۴) ۲۴

(۳) ۳۰

(۲) ۱۸

(۱) ۱۲





۱۱۴. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۶ سه درآیه که در یک سطر یا یک ستون باشند را انتخاب کرد به طوری که مجموع آن ها برابر ۱۰ باشد؟

(۱) ۶۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۱۱۵. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۶ سه درآیه که مجموع آن ها برابر می باشند را انتخاب کرد؟

(۱) ۳۰۶ (۲) ۳۲۶ (۳) ۳۱۶ (۴) ۳۳۶

۱۱۶. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۶، دو درآیه که مجموع آن ها برابر ۸ می باشند را انتخاب کرد به طوری که در یک سطر یا یک ستون نباشند؟

(۱) ۶۱ (۲) ۶۲ (۳) ۶۳ (۴) ۶۴

۱۱۷. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۵، دو درآیه که مجموع آن ها برابر ۷ می باشند را

انتخاب کرد به طوری که در یک سطر یا یک ستون نباشند؟

(۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶





۱۱۸. به چند طریق می توان در یک مربع لاتین مرتبه ۶، سه درآیه که مجموع آن برابر ۶ می باشند را انتخاب کرد به طوری که در یک سطر یا یک ستون نباشند؟

(۴) ۳۲۶

(۳) ۲۹۰

(۲) ۳۱۴

(۱) ۳۰۲

۱۱۹. دو مربع لاتین A و B از مرتبه ۴ متعامدند. اگر $b_{۱۴} = a_{۲۲} = ۴$ و $b_{۳۱} = b_{۴۲} = a_{۱۳} = ۳$ و $b_{۴۳} = a_{۴۱} = ۲$

باشند در این صورت $a_{۳۲} + a_{۴۴} + b_{۲۳} + b_{۱۲}$ کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۱

(۳) ۱۳

(۴) ۱۰

۱۲۰. دو مربع لاتین A و B از مرتبه ۵ متعامدند. اگر $a_{۱۱} = a_{۴۲} = ۱$ و $a_{۱۵} = a_{۵۳} = ۵$ و $a_{۴۴} = ۲$ و $a_{۱۳} = a_{۴۴} = ۳$

و $b_{۱۲} = b_{۲۵} = b_{۳۳} = b_{۵۴} = ۲$ باشند در این صورت $a_{۴۱} + a_{۳۳} + a_{۲۱} + a_{۳۲}$ کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) ۱۶

(۳) ۱۴

(۴) ۱۷





با توجه به اطلاعات زیر به ۴ سؤال بعد پاسخ دهید.

	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳
→ طبقه سوم (سواری)			
→ طبقه دوم (وانت)			
→ طبقه اول (کامیون)			

سه نفر با اسامی محمد علی و رضا قرار است هر کدام ۳ اتومبیل متفاوت از انواع سواری، وانت و کامیون را در یک پارکینگ ۳ طبقه که مطابق شکل مقابل، هر طبقه دارای ۳ جای پارک، آن هم مختص فقط یک نوع خودرو پارک کنند. هر پارکینگ دارای دسترسی مجزاست. پارک خودروها در این پارکینگ، دارای شروط زیر است:

شرط ۱: اتومبیل هایی که در ستون دوم پارک می شوند، توسط افراد مختلف پارک می شوند. شرط ۲: کامیونی که محمد پارک می کند باید در ستونی باشد که رضا در آن سواری پارک کرده است.

شرط ۳: در ستون سوم، حداقل دو نوع اتومبیل باید توسط یک نفر پارک شده باشد.

شرط ۴: وانتی که رضا پارک می کند یا دقیقاً زیر سواری که خودش پارک کرده پارک می شود یا دقیقاً بالای کامیونی که علی پارک کرده است.

۱۲۱. اگر رضا و علی اتومبیل سواری را به ترتیب در ستون های دوم و سوم پارک کنند، کامیون های پارک شده توسط

رضا و علی به ترتیب در کدام ستون ها قرار می گیرند؟

۱) دوم - اول ۲) اول - دوم

۳) سوم - اول ۴) اول - سوم

۱۲۲. اگر اتومبیل های کامیون، وانت و سواری در ستون سوم به ترتیب توسط رضا، محمد و محمد پارک شده باشند،

همین نوع اتومبیل ها با همان ترتیب در ستون اول به ترتیب توسط کدام افراد پارک شده اند؟

۱) محمد - علی - رضا ۲) علی - رضا - علی

۳) محمد - علی - علی ۴) محمد - رضا - علی

۱۲۳. اگر وانت ها در ستون های اول، دوم و سوم به ترتیب توسط علی، رضا و محمد پارک شده باشند،

کامیون ستون سوم توسط چه کسی پارک شده است؟

۱) رضا ۲) علی

۳) محمد ۴) نمی توان اظهار نظر کرد.



۱۲۴. اگر رضا دو اتومبیل را در ستون سوم پارک کرده باشد، علی کدام اتومبیل یا اتومبیل ها را به طور قطع در ستون

اول پارک کرده است؟

(۲) سواری و وانت

(۱) فقط کامیون

(۴) وانت و کامیون

(۳) سواری و کامیون

۱۲۵. کدام مربع لاتین، زوج متعامد ندارد؟

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲

(۴)

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

(۳)

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

(۲)

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

(۱)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱۲۶. برای مربع لاتین مقابل چند زوج متعامد وجود دارد؟

(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۸

(۳) ۵

۱۲۷. کدام مربع لاتین با مربع لاتین مقابل نمی تواند زوج متعامد تشکیل دهد؟

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴	۵
۳	۴	۵	۱	۲
۵	۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲	۳

(۲)

۱	۲	۳	۴	۵
۴	۵	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۵	۱
۵	۱	۲	۳	۴
۳	۴	۵	۱	۲

(۱)

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

(۴)

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۱	۵	۳	۲
۱	۲	۳	۵	۳
۳	۵	۲	۱	۴
۲	۳	۱	۴	۵

(۳)





(سراسری ریاضی ۸۰)

۱۲۸. چند دسته ۳ تایی از ۵ نوع گل مختلف میتوان ساخت؟ (تکرار مجاز است)

- ۲۴ (۱) ۳۲ (۲) ۳۵ (۳) ۴۲ (۴)

(آزاد ریاضی ۸۰)

۱۲۹. با ارقام ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۳, ۳, ۳, ۳ چند عدد زوج هشت رقمی می توان نوشت؟

- $\frac{8!}{4!4!}$ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴)

(آزاد ریاضی ۸۰)

۱۳۰. معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ با شرط $x_i \in \mathbb{Z}$ و $x_i \geq 0$ چند جواب دارد؟

- $\binom{9}{6}$ (۱) $\binom{8}{6} + \binom{7}{5}$ (۲) $\binom{9}{6} + \binom{8}{5}$ (۳) $\binom{10}{6} + \binom{9}{5}$ (۴)

(آزاد ریاضی ۸۱)

۱۳۱. معادله $x_1 + x_2 + 10x_3 = 20$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

- ۳۰ (۱) ۳۱ (۲) ۳۳ (۳) ۴۱ (۴)

(آزاد ریاضی ۸۲)

۱۳۲. معادله $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_3}$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

- ۱۰ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۹ (۴)

۱۳۳. هفت کبوتر به چند طریق می توانند در ۳ لانه متمایز قرار گیرند به طوری که هیچ لانه ای خالی نماند؟

(سراسری ریاضی ۸۳)

- ۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴)





(آزاد ریاضی ۱۵)

۱۳۴. معادله $(x_1 + x_2)^3 + x_3 + x_4 = 20$ چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۱ (۳) ۲۲ (۴) $\begin{pmatrix} 23 \\ 20 \end{pmatrix}$

(آزاد ریاضی ۱۶)

۱۳۵. نامعادله $100 < (x_1 + x_2 + x_3)^3 < 250$ چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۲۱ (۳) ۱۶ (۴) ۶

(سراسری ریاضی ۱۷)

۱۳۶. در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b ، از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰

(سراسری ریاضی ۱۷)

۱۳۷. به چند طریق می توان ۱۲ سکه را بین سه نفر تقسیم کرد، به طوری که لااقل به هر کدام یک سکه برسد؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۴۸ (۳) ۴۵ (۴) ۳۶

(آزاد ریاضی ۱۷)

۱۳۸. معادله $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 20$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

- (۱) ۱۹۰ (۲) ۶۶ (۳) ۹۵ (۴) ۶۰





۱۳۹. از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آنکه حداقل ۴

پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

(سراسری ریاضی ۸۹)

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۵ (۴)

(آزاد ریاضی ۹۰)

۱۴۰. معادله $x + y + 5z^2 = 21$ چند دسته جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

۴۱ (۱) ۴۲ (۲) ۴۴ (۳) ۳۹ (۴)

(سراسری ریاضی ۹۱)

۱۴۱. با ارقام ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان» می توان نوشت؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

(آزاد ریاضی ۹۱)

۱۴۲. تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x + y + z = 7$ چند تا است؟

۳۶ (۱) ۳۵ (۲) ۴۰ (۳) ۳۲ (۴)

۱۴۳. به چند طریق می توان ۹ کتاب یکسان را در ۵ قفسه متمایز جای داد به طوری که در هر قفسه، لااقل یکی از

آنها قرار داده شود؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

۳۵ (۱) ۴۲ (۲) ۵۶ (۳) ۷۰ (۴)





(سراسری ریاضی ۹۴)

۱۴۴. تعداد جواب های صحیح و غیرمنفی نامساوی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ کدام است؟

۳۵ (۴)

۳۳ (۳)

۳۲ (۲)

۳۰ (۱)

(سراسری ریاضی ۹۷)

۱۴۵. تعداد جواب های صحیح و غیرمنفی نامعادله $x + y + z \leq 5$ کدام است؟

۶۰ (۴)

۵۶ (۳)

۵۴ (۲)

۵۰ (۱)





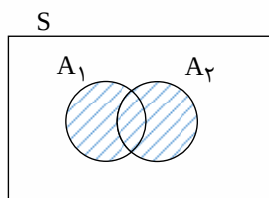
درس دوم: روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

گاهی مواقع با روش های معمولی پرداختن به حل برخی مسائل هم دشوار و هم وقت گیر است. یکی از ابزارهای قوی شمارش، اصل شمول و عدم شمول می باشد که می تواند مسائل به ظاهر دشوار را به راحتی مورد تحلیل و بررسی قرار دهد اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه های متناهی از S باشند، اصل شمول و عدم شمول فرمولی برای محاسبه

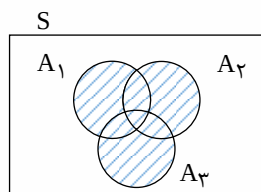
$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \text{ ارائه می دهد.}$$

الف) اگر S مجموعه ای متناهی و A_1 و A_2 زیرمجموعه های S باشند، اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه به صورت مقابل است.



$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

ب) اگر S مجموعه ای متناهی و A_1 و A_2 و A_3 زیرمجموعه های S باشند، اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه به صورت مقابل است.



$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

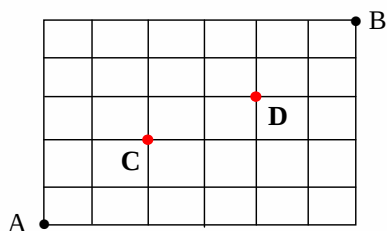
۴۶. چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۷۰ وجود دارد که بر ۴ یا ۷ بخش پذیر باشد؟





۴۷. اگر در شکل مقابل فقط حرکت به سمت راست و حرکت به سمت بالا مجاز باشد، به چند طریق می توان

از A به B رسید به طوری که حداقل از یکی از نقاط C یا D عبور کرده باشیم؟



(۱) ۳۰۴

(۲) ۳۰۸

(۳) ۳۱۲

(۴) ۳۲۴

۴۸. چند عدد چهار رقمی وجود دارد به طوری که حداقل دارای یکی از ارقام ۰ یا ۲ باشد؟ (تکرار مجاز نیست)

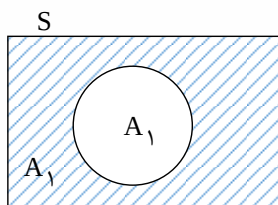
اصل شمول و عدم شمول به روش غیرمستقیم

در کاربرد از اصل شمول و عدم شمول معمولاً این اصل را به صورت متممش بیان می کنند. به این صورت که اگر

$A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه های متناهی باشند، براساس قانون دمورگان فرمولی برای محاسبه $|A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n|$

ارائه می شود.

الف) اگر S مجموعه ای متناهی و A_1 زیرمجموعه ای از آن باشد، داریم:

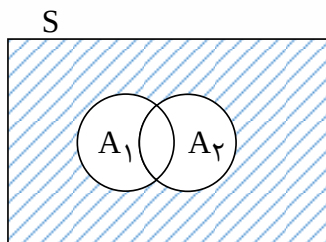


$$|A'_1| = |S| - |A_1|$$



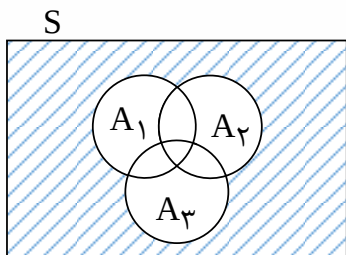


ب) اگر S مجموعه ای متناهی و A_1 و A_2 زیرمجموعه‌هایی از آن باشد، داریم:



$$\begin{aligned} |A'_1 \cap A'_2| &= |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| \\ &= |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \end{aligned}$$

ج) اگر S مجموعه ای متناهی و A_1, A_2, A_3 زیرمجموعه‌هایی از آن باشند، داریم:

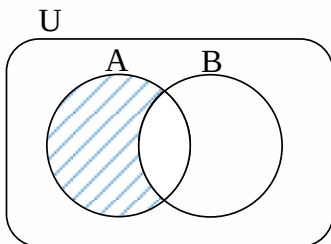


$$|A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

۴۹. چند عضو در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ وجود دارد که نسبت به ۳۰ اول باشند؟

چند نکته مهم در اصل شمول و عدم شمول

تعداد اعضای که متعلق به A باشند و متعلق به B نباشند. (فقط متعلق به A)

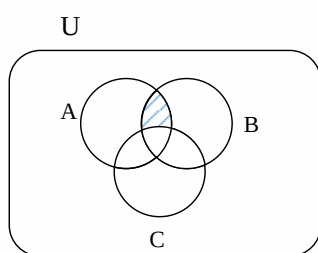


$$|A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B|$$



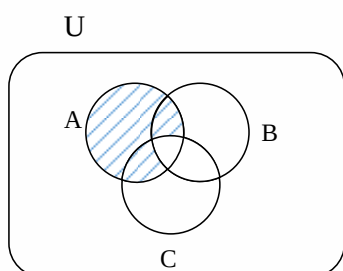


تعداد اعضای که متعلق به A و B باشند ولی به C متعلق نباشند.



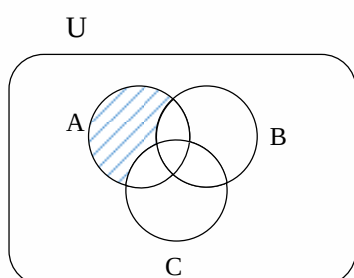
$$|A \cap B \cap C'| = |(A \cap B) - C| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C|$$

تعداد اعضای که متعلق به A باشند و همزمان متعلق به B و C نباشند.



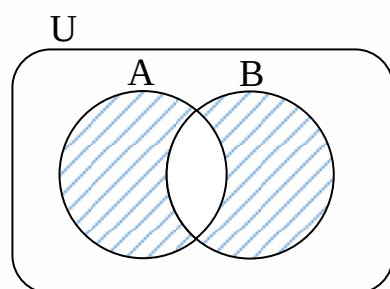
$$|A \cap (B \cap C)'| = |A - (B \cap C)| = |A| - |A \cap B \cap C|$$

تعداد اعضای که متعلق به A باشند و متعلق به B نباشند و متعلق به C نباشند.



$$\begin{aligned} |A \cap B' \cap C'| &= |A \cap (B \cup C)'| = |A - (B \cup C)| \\ &= |A| - |A \cap (B \cup C)| = |A| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

تعداد اعضای که فقط متعلق به A یا فقط متعلق به B باشند.



$$|A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A - B| + |B - A|$$





۵۰. چند عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی ۵۰ وجود دارد که بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد؟

۵۱. در مجموعه $\{100, 101, 102, \dots, 600\}$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ یا ۹ بخش پذیر باشند؟

۱۸۱ (۴)

۱۷۴ (۳)

۱۶۷ (۲)

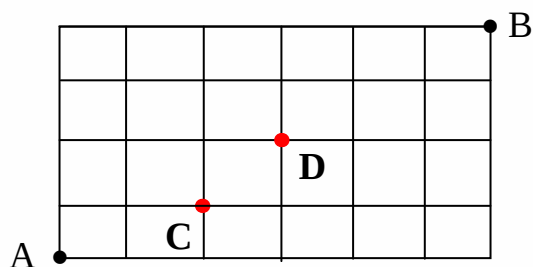
۱۵۳ (۱)

۵۲. در یک کلاس ۲۴ نفری، ۱۰ نفر لاغر و ۱۲ نفر عینکی هستند. اگر بدانیم ۲ نفر هم لاغر و هم عینکی هستند،

چند نفر از این کلاس نه لاغر و نه عینکی میباشند؟

۵۳. اگر در شکل مقابل فقط حرکت به سمت راست و حرکت به سمت بالا مجاز باشد، به چند طریق می توان

از A به B رسید به طوری که از هیچ یک از نقاط C و D عبور نکنیم؟



۵۶ (۱)

۵۴ (۲)

۴۵ (۳)

۶۵ (۴)





۵۴. چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هر یک از ارقام ۳ و ۶ حداقل یکبار ظاهر شوند؟
(سراسری ریاضی ۸۸)

۵۶ (۴)

۵۴ (۳)

۵۲ (۲)

۴۸ (۱)

۵۵. چند عدد طبیعی مانند n که $۱ \leq n \leq ۳۵۰$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشد؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۶. سه نفر که هر کدام دارای یک کلاه می باشند به چند طریق می توانند کلاه های خود را با هم عوض کنند به طوری که هیچ کدام کلاه خود را در اختیار نداشته باشند؟

۵۷. اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک ۷ و یک ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد، حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد). (مشابه تمرین کتاب درسی)





۵۸. در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 90\}$ چند عدد وجود دارد که نه مربع کامل و نه مکعب کامل می باشند؟

۷۹ (۴)

۷۵ (۳)

۷۸ (۲)

۷۶ (۱)

۵۹. معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $2 \leq x_1 \leq 6$ و $1 \leq x_2 \leq 4$ باشد؟

باشد؟

۶۰. معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $3 \leq x_1 \leq 6$ و $1 \leq x_2 \leq 5$ باشد؟

و $2 \leq x_3 \leq 4$ باشند؟





۶۱. در چند جایگشت از حروف کلمه NAVID هیچ یک از حروف A، N و V در جای اصلی خود قرار ندارند؟

۶۸ (۴)

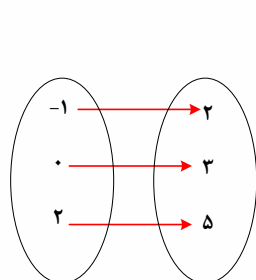
۶۶ (۳)

۶۲ (۲)

۶۴ (۱)

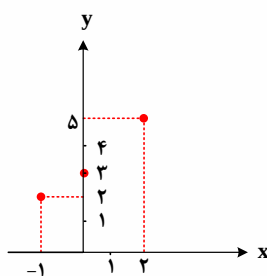
تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی

یادآوری: دوتایی (a, b) را یک زوج مرتب میگوییم که a مؤلفه اول و b مؤلفه دوم زوج مرتب است. به مجموعه ای از زوج مرتب ها نیز رابطه می گوییم به طور مثال $R = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 5)\}$ رابطه ای شامل ۳ زوج مرتب است که می توان آن را به صورت جدول، نمودار مختصات و نمودار پیکانی نیز نشان داد.



مؤلفه اول

مؤلفه دوم



مؤلفه اول	-1	0	2
مؤلفه دوم	2	3	5

تابع رابطه ای است که در آن مؤلفه های اول متمایز باشند. به عبارت بهتر باید مؤلفه اول تکراری نداشته باشیم مگر آن که مؤلفه های دوم نیز برابر باشند. به طور مثال رابطه $\{(0, 1), (-2, 4), (0, 3)\}$ تابع نیست ولی رابطه های $\{(1, 2), (0, 5), (-3, 1)\}$ و $\{(-2, 0), (1, 2), (-2, 0)\}$ تابع هستند.

شرط تابع بودن در نمایش های مختلف به صورت زیر می باشد:

(۱) در زوج های مرتب باید مؤلفه های اول، متمایز باشند ولی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه اول یکسان بودند باید مؤلفه دومشان نیز با هم مساوی باشد.

(۲) در نمودار پیکانی باید از هر مؤلفه اول دقیقاً یک پیکان خارج شود.

(۳) در نمودار مختصات باید هر خطی موازی محور عرض ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

(یعنی می تواند قطع هم نکند ولی در صورت قطع کردن باید فقط در یک نقطه باشد، نه بیشتر)





یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B یک تابع نامیده می شود، هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A ، دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر کرد. به طور مثال اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3\}$ باشد آنگاه تابع f از A به B را می توان به صورت $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$ تعریف کرد. پس اگر $F = A \rightarrow B$ تابع باشد و $|A| = m$ ، در این صورت:

(۱) تابع f حتماً باید دارای m زوج مرتب با m مولفه اول متمایز باشد.

$$D_f = A \quad (۲)$$

۶۲. چند تابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c, d, e\}$ می توان نوشت؟

نکته: تعداد توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر با n^m است.

توزیع n شی مختلف در k حوزه مختلف

۶۳. به چند طریق می توان ۵ خودکار مختلف را بین ۳ نفر تقسیم کرد؟

۶۴. به چند طریق می توان ۵ کارت با رنگ های مختلف را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به هر یک حداقل یک کارت برسد؟

(۱) ۹۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۸۰





تعداد توابع یک به یک

تابع یک به یک مجموعه ای از زوج مرتب هاست که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه های اول یکسان یا مؤلفه های دوم یکسان نداشته باشند.

۶۵. از مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند تابع یک به یک می توان نوشت؟

۶۶. از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ به $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ چند تابع یک به یک می توان نوشت؟

نکته: اگر $|A| = m$ و $|B| = n$ باشد در این صورت با شرط $m \leq n$ تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر با تعداد انتخاب های m شی از بین n شی $(n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}$ است.

۶۷. به چند طریق می توان ۴ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک کتاب نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک کتاب داده باشیم).

(۱) ۱۶۸۰ (۲) ۱۶۷۰ (۳) ۱۲۸۰ (۴) ۱۲۷۰





تعداد توابع پوشا

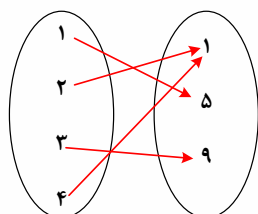
اگر تابع f از A به B نوشته شود، تابع f را پوشا می‌گوییم هرگاه تمامی اعضای مجموعه B در زوج مرتب های تابع f مورد استفاده قرار گرفته باشند یا اصطلاحاً پوشش داده شده باشند. پس $R_f = B$ می‌باشد.

به زبان ریاضی و استفاده از سورهای عمومی و وجودی می‌توان گفت تابع $F: A \rightarrow B$ پوشاست اگر:

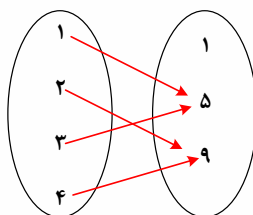
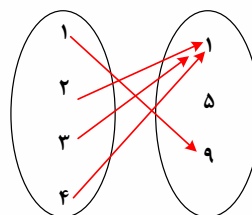
$$\forall y \in B \exists x \in A; f(x) = y$$

۶۸. چند تابع پوشا از $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ به $B = \{b_1, b_2\}$ می‌توان نوشت؟

۶۹. چند تابع پوشا از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به $B = \{1, 5, 9\}$ می‌توان نوشت؟



یکی از توابع پوشا

یکی از توابع موجود در مجموعه A_1 یکی از توابع موجود در مجموعه A_2

۷۰. چند تابع پوشا از $A = \{a, b, c\}$ به $B = \{a, b, c, d\}$ می‌توان نوشت؟





نکته: اگر $|A| = m$ و $|B| = n$ باشد در این صورت با شرط $m \geq n$ ، تعداد توابع از A به B که در آن ها $R_f = B$ باشد یا اصطلاحاً پوشا باشند برابر است با:

$$n^m - \binom{n}{1} (n-1)^m + \binom{m}{2} (n-2)^m - \binom{m}{3} (n-3)^m + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^m$$

۷۱. از مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3\}$ به ترتیب چند تابع پوشا و چند تابع یک به یک می توان نوشت؟

(۱) ۱۲، ۶ (۲) ۶، ۱۲ (۳) ۲۱، ۶ (۴) ۶، ۶

نکته: همواره تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر با تعداد توابع یک به یک است. زیرا در این صورت هر تابع پوشایی که نوشته شود حتماً یک به یک است و برعکس.

۷۲. به چند طریق می توان ۶ خودکار مختلف را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداقل یک خودکار برسد؟

(۱) ۵۳۷ (۲) ۵۴۰ (۳) ۵۴۵ (۴) ۵۶۰





اصل لانه کبوتری

بسیاری از بدیهیات دنیای اطراف و زندگی روزمره ما از قوانین ریاضی پیروی می کنند و در عین سادگی و ظرافت، دارای کاربردهای گوناگون و متنوعی هستند. به عنوان مثال واضح است که اگر ۵ کبوتر به طرف ۴ لانه پرواز کنند و بخواهند داخل لانه ها بشوند، حداقل یکی از لانه ها شامل دو کبوتر خواهد بود به عبارت بهتر در بدبینانه ترین حالت ممکن (عادلانته ترین روش توزیع کردن) حداقل یکی از لانه ها شامل دو کبوتر می باشد کما این که ممکن است هر ۵ کبوتر در یک لانه قرار گیرند اما امکان ندارد که همه لانه ها کمتر از دو کبوتر را شامل شوند. همچنین اگر ۹ نفر در یک میهمانی حضور داشته باشند، حداقل روز تولد دو نفر از آنها در یک روز هفته می باشد. مضمون دو مثال قبل را می توان در قالب یک اصل ساده به نام اصل لانه کبوتری بیان کرد.

نکته: اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم به طوری که $m > n$ و همه کبوترها درون لانه ها قرار بگیرند، در این صورت لانه ای وجود دارد که در آن حداقل ۲ کبوتر قرار گرفته است.

این اصل به نام های اصل دیریکه یا اصل حجره ها نیز بیان می شود. درست است که این اصل صورتی واضح دارد و بدیهی به نظر می رسد اما در واقع یک قضیه است که با برهان خلف اثبات می شود و بسیار پرکاربرد می باشد و بیشتر در جاهایی مورد استفاده قرار می گیرد که بخواهیم وجود دو یا چند شی را که دارای ویژگی مشترک هستند را اثبات کنیم.

۷۳. ثابت کنید اگر ۱۱ کبوتر را در ۵ لانه قرار دهیم حداقل یکی از لانه ها شامل ۳ کبوتر می باشد.

پاسخ: استفاده از برهان خلف: فرض می کنیم هیچ لانه ای بیش از ۲ کبوتر را شامل نشود در این صورت در ۵ لانه حداکثر $5 \times 2 = 10$ کبوتر قرار گرفته اند که این نتیجه با فرض سؤال که دارا بودن ۱۱ کبوتر است در تناقض می باشد. پس حداقل یکی از لانه ها شامل ۳ کبوتر است.

۷۴. ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد وجود دارد که به پیمانه ۴ هم نهشت می باشند.

پاسخ: می دانیم همه اعداد طبیعی در تقسیم بر ۴ دارای ۴ نوع باقی مانده هستند که یکی از اعضای مجموعه $\{0, 1, 2, 3\}$ می باشد. حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی مانده های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه ها فرض کنیم طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار می گیرند به عبارت بهتر حداقل ۲ عدد از این ۵ عدد باقی مانده های تقسیم آن ها بر ۴ با هم برابر است و به پیمانه ۴ هم نهشت می باشند.



۷۵. حداقل چند نفر در یک جلسه حاضر باشند تا مطمئن شویم حداقل ۲ نفر از آن ها دارای ماه تولد یکسان هستند؟

۲۶ (۴)

۲۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ درست است.

چون هر سال ۱۲ ماه است بنابراین ۱۲ لانه در اختیار داریم که اگر $12 \times 1 = 12$ کبوتر داشته باشیم نمی توانیم مطمئن باشیم حداقل در یکی از لانه ها ۲ کبوتر قرار می گیرد اما اگر کبوتر ۱۳ام را هم در اختیار داشته باشیم در این صورت مطمئن خواهیم شد که حداقل در یکی از لانه ها ۲ کبوتر قرار دارد. پس حداقل تعداد حاضران در جلسه باید ۱۳ نفر باشد.

۷۶. حداقل چند نقطه درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ در نظر بگیریم تا مطمئن شویم حداقل ۲ نقطه در میان آن ها فاصله ای کمتر از ۱ دارند؟

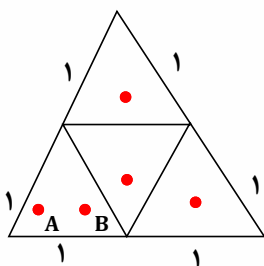
۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ درست است.



می دانیم در یک مثلث بیشترین فاصله دو نقطه، فاصله دو رأس یا ضلع مثلث است. پس ابتدا مثلث را به شکل مقابل تقسیم بندی می کنیم. ملاحظه می شود که ۴ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ پدید می آید. اگر این ۴ مثلث را ۴ لانه در نظر بگیریم برای آن که مطمئن شویم حداقل فاصله دو نقطه از هم کمتر از ۱ است باید $(4 \times 1 + 1) = 5$ نقطه درون این مثلث انتخاب کنیم پس $AB < 1$ می باشد.

نکته: اگر هر ضلع مثلث متساوی الاضلاعی را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم می توانیم با رسم خطوطی موازی دیگر اضلاع مثلث، n^2 مثلث متساوی الاضلاع به ابعاد کوچک تر ایجاد کنیم.

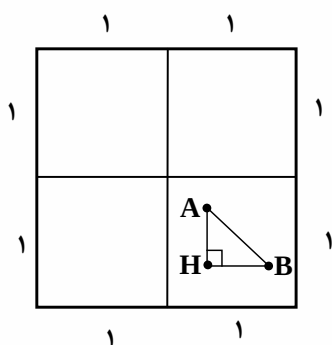




مثال: به طور مثال در یک مثلث متساوی به ضلع ۴ می توان ۱۶ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع یک ایجاد کرد یا ۴ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ ایجاد کرد.

۷۷. پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض اند. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.

پاسخ: ابتدا با رسم محورهای تقارنی که موازی اضلاع هستند، سطح مربع را به ۴ مربع مساوی تقسیم می کنیم. ۴ مربع کوچک تر را ۴ لانه و ۵ نقطه مفروض را ۵ کبوتر در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از نقطه ها به یکی از مربع های کوچک تعلق دارند. با توجه به آن که طول ضلع مربع بزرگ ۲ است در نتیجه طول ضلع مربع های کوچک ۱ و فاصله دو نقطه A و B با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می آید.



$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

همان طور که از شکل مشخص است طول های AH و BH از ۱ که طول ضلع مربع های کوچک است کمتر هستند در نتیجه داریم:

$$AB^2 < 1^2 + 1^2 \Rightarrow AB^2 < 2 \Rightarrow AB < \sqrt{2}$$

۷۸. ثابت کنید در هر گراف ساده از مرتبه $p \geq 2$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

پاسخ: می دانیم در هر گراف ساده از مرتبه p ، درجه هر رأس عددی بین صفر تا $p-1$ است که p عدد متلف می باشند. همچنین می دانیم که در یک گراف ساده از مرتبه p امکان ندارد که هم زمان رأس درجه صفر و رأس درجه $p-1$ وجود داشته باشد. بنابراین حداقل $(p-1)$ نوع درجه خواهیم داشت. اگر رأس را p کبوتر و $(p-1)$ نوع درجه را $(p-1)$ لانه در نظر بگیریم طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو رأس با هم برابر می باشد.





نکته: تعمیم اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر درون n لانه قرار بگیرد به طوری که $m > nk$ ، آنگاه لانه ای وجود دارد که حداقل $(k + 1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است. به عبارت بهتر اگر بخواهیم m کبوتر را در n لانه قرار دهیم، لانه ای وجود خواهد داشت که حداقل $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ کبوتر در آن قرار دارد.

۷۹. در یک دبیرستان ۲۷۱ نفری، n چه عددی باشد تا مطمئن باشیم حداقل n نفر از آن ها ماه و روز تولدشان در هفته یکی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ درست است. هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز است. بنابراین $۱۲ \times ۷ = ۸۴$ لانه داریم. با توجه به فرض سؤال ۲۷۱ کبوتر را دارا می باشیم پس حداقل یکی از لانه ها شامل $\left\lceil \frac{۲۷۱}{۸۴} \right\rceil = ۳$ کبوتر است.

تذکر: ممکن است صورت سؤال تست قبل به صورت «در یک دبیرستان ۲۷۱ دانش آموز وجود دارد. حداقل چند نفر از آن ها ماه و روز تولدشان یکی است؟» باشد.

۸۰. مجموعه S دارای ۵۲ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم اعضای S بر ۱۱، حداقل چند عضو باقی مانده یکسان دارند؟ (بدبینانه ترین حالت ممکن در توزیع و تنوع اعداد را در نظر بگیرید.)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

۵۲ کبوتر و ۱۱ لانه در اختیار داریم پس حداقل $\left\lceil \frac{۵۲}{۱۱} \right\rceil = ۵$ کبوتر در یک لانه قرار می گیرند. به عبارت بهتر حداقل ۵ عدد از مجموعه S در تقسیم بر ۱۱ دارای باقی مانده یکسان هستند.

۸۱. حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن شویم حداقل ۲۰

(مشابه تمرین کتاب درسی)

نفر از آن ها روز تولدشان در هفته یکسان باشد؟

پاسخ: هر هفته ۷ روز است بنابراین ۷ لانه در اختیار داریم که اگر $۱۹ \times ۷ = ۱۳۳$ کبوتر داشته باشیم نمی توانیم مطمئن باشیم حداقل در یکی از لانه ها ۲۰ کبوتر قرار می گیرد اما اگر کبوتر ۱۳۴م را هم در اختیار داشته باشیم در این صورت مطمئن خواهیم شد که حداقل در یکی از لانه ها ۲۰ کبوتر قرار دارد. پس حداقل ۱۳۴ نفر باید در سالن حاضر باشند.





تذکر: برای حل سؤال ۸۱ می توانستیم از نکته قبل استفاده کنیم به طوری که $\left\lceil \frac{m}{7} \right\rceil = 20$ است پس $19 \times 7 + 1 = \text{Min}(m)$ برابر ۱۳۴ می باشد.

نکته: حداقل تعداد کبوتر برای این که حداقل در یکی از n لانه، k کبوتر قرار گیرد برابر با $n(k-1) + 1$ است.

۸۲. ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند حداقل ۷ نفر از آن ها روز

تولدشان در هفته و ماه تولدشان در سال یکسان است. (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ: می دانیم هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز دارد. بنابراین $12 \times 7 = 84$ لانه در اختیار داریم که اگر $84 \times 6 = 504$ دانش آموز در دبیرستان مشغول به تحصیل باشند نمی توانیم مطمئن باشیم که حداقل ۷ نفر از آن ها ماه و روز تولدشان در هفته یکسان است. اما اگر تعداد دانش آموزان ۵۰۵ نفر باشد در این صورت مطمئن خواهیم شد که حداقل در یکی از لانه ها ۷ نفر قرار دارند.

۸۳. یک تاس همگن را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا به طور یقین سه بار یا بیشتر، نتیجه یکسان داشته

باشیم؟ (سراسری ریاضی ۹۵)

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

یک تاس ۶ حالت دارد که اگر هر یک از اعداد روی تاس را یک لانه فرض کنیم طبق رابطه گفته شده در اصل لانه کبوتری و نکته قبل اگر بفهمیم مطمئن شویم که حداقل ۳ بار نتیجه یکسان داشته ایم باید حداقل تاس را $1 + (3-1) \times 6 = 13$ بار پرتاب کنیم. طبق آن

$$\left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil = 3 \Rightarrow 13 \leq m \leq 18 \Rightarrow \text{Min}(m) = 13$$

چه در درسنامه بیان کردیم، داریم:

۸۴. در جعبه ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج

کنیم تا مطمئن باشیم ۶ گوی خارج شده هم رنگ باشند؟ (فارج ریاضی ۹۰)

(۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

باید بدبینانه ترین حالت ممکن را در نظر بگیریم. اگر ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۵ گوی آبی و ۵ گوی زرد از جعبه خارج کنیم باز هم به شرایط دلفواه و مورد نظر که خارج شدن ۶ گوی هم رنگ است دست پیدا نکرده ایم اگر یک گوی دیگر از جعبه خارج کنیم مطمئن خواهیم شد که حتماً در گوی های خارج شده ۶ گوی هم رنگ وجود دارد. پس باید حداقل $1 + (5 + 5 + 5 + 3) = 19$ گوی از جعبه خارج کنیم.





۵۴.۸۵ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

پاسخ: ۵۴ شاخه گل را ۵۴ کبوتر فرض می کنیم. اگر n لانه داشته باشیم در بدبینانه ترین حالت ممکن باید در هر لانه $۵-۱=۴$ کبوتر قرار گیرد که در این صورت متماً به $۴n$ کبوتر نیاز داریم. اکنون اگر کبوتر $(۴n + ۱)$ را در اختیار داشته باشیم مطمئن خواهیم شد حداقل در

$$۴n + ۱ \leq ۵۴ \Rightarrow ۴n \leq ۵۳ \Rightarrow n \leq \frac{۵۳}{۴} \Rightarrow \text{Max}(n) = ۱۳$$

یکی از لانه ها ۵ کبوتر قرار دارد. داریم:

$$\left\lceil \frac{۵۴}{n} \right\rceil = ۵ \Rightarrow \frac{۵۴}{n} > ۴ \Rightarrow n < \frac{۵۴}{۴} \Rightarrow \text{Max}(n) = ۱۳$$

طبق آن چه در درسنامه بیان کردیم، داریم:

نکته: حداکثر تعداد لانه برای این که m کبوتر درون آن ها قرار گیرند به طوری که حداقل در یکی از لانه ها دست کم

k کبوتر وجود داشته باشد برابر با $\left\lceil \frac{m-1}{k-1} \right\rceil$ است.

۵۵.۸۶ نفر را حداکثر در چند کلاس می توان جا داد به طوری که حداقل در یکی از کلاس ها حداقل ۸ نفر

وجود داشته باشد؟

۷ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

اگر n لانه داشته باشیم و در هر لانه $۸-۱=۷$ کبوتر قرار گیرد در این صورت با در اختیار داشتن $۷n$ کبوتر هم نمی توانیم مطمئن شویم که در یکی از لانه ها حداقل ۸ کبوتر قرار دارد. پس حداقل باید $(۷n + ۱)$ کبوتر در اختیار داشته باشیم. داریم:

$$۷n + ۱ \leq ۵۵ \Rightarrow ۷n \leq ۵۴ \Rightarrow n \leq \frac{۵۴}{۷} \Rightarrow \text{Max}(n) = ۷$$





پرسش های تشریحی

۱. در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که:

الف) بر ۴ یا ۷ بخش پذیر باشند.

ب) بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند.

ج) فقط بر ۴ یا فقط بر ۷ بخش پذیر باشند.

د) نه بر ۴ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.



۲. در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر

بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳

(مشابه تمرین کتاب درسی)

نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند. مشخص کنید:

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

ج) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

د) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

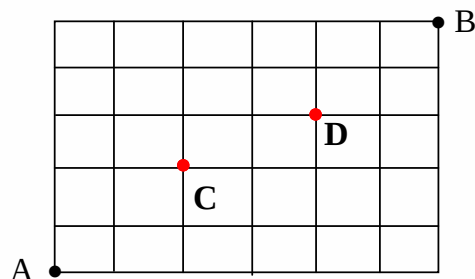


۳. در چند عدد سه رقمی با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ هر دو رقم ۳ و ۴ ظاهر می شوند؟ (تکرار مجاز است).



۴. اگر فقط بتوان به سمت بالا یا به سمت راست حرکت کرد، چند طریق می توان از A به B رسید به طوری

که از C بگذریم ولی از نقطه D گذر نکرده باشیم؟





۵. اگر بخواهیم یک قفل شامل رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند را باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند را در اختیار ما قرار داده و بستن و امتحان کردن هر یک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶. چه تعداد تابع همچون $f: A \rightarrow B$ می توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A| = ۵$ و $|B| = ۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۷. به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۸. به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۹. ثابت کنید در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۰. ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان، عددی زوج شود.
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۱. مجموعه اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر می گیریم نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۲. مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده اند را در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو را انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.
(مشابه تمرین کتاب درسی)





۱۳. ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که

فاصله آن ها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۴. ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود

دارد به طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می باشد. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۵. ۱۰ جعبه در اختیار داریم که در ۹ تا از آن ها ده سیب ۱۰ گرمی و در یکی از آن ها ده سیب ۹ گرمی وجود دارد. در

کنار این ۱۰ جعبه، یک قاتل و یک ترازو نیز قرار دارد. برای تشخیص جعبه ای که شامل ده سیب ۹ گرمی است فقط

یک بار اجازه استفاده از ترازو را دارید و در صورتی که جعبه را اشتباه تشخیص دهید توسط قاتل کشته خواهید

شد. برای زنده ماندن با چه روشی باید جعبه مورد نظر را پیدا کرد؟ (سؤال هوش)



پاسخ پرسش های تشریحی

۱. ابتدا دو مجموعه A و B را به صورت مقابل تعریف می کنیم:

اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند $B =$ ، اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند $A =$

$$\text{الف)} |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left[\frac{200}{4} \right] + \left[\frac{200}{7} \right] - \left[\frac{200}{28} \right] = 50 + 28 - 7 = 71$$

$$\text{ب)} |A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B| = \left[\frac{200}{4} \right] - \left[\frac{200}{28} \right] = 50 - 7 = 43$$

$$\text{ج)} |A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = \left[\frac{200}{4} \right] + \left[\frac{200}{7} \right] - 2 \left[\frac{200}{28} \right] = 50 +$$

$$28 - 14 = 64$$

$$\text{د)} |A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 200 - \left[\frac{200}{4} \right] -$$

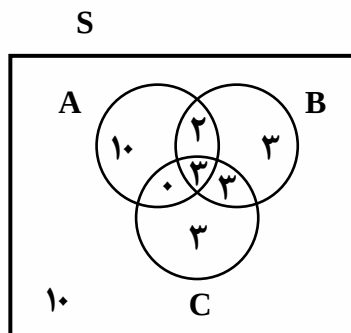
$$\left[\frac{200}{7} \right] + \left[\frac{200}{28} \right] = 200 - 50 - 28 + 7 = 129$$

۲. ابتدا سه مجموعه A و B و C را به صورت زیر تعریف می کنیم:

نفراتی که بسکتبال بازی می کنند $C =$ ، نفراتی که والیبال بازی می کنند $B =$ ،

نفراتی که فوتبال بازی می کنند $A =$

استفاده از جبر مجموعه ها: با توجه به اطلاعات مسئله داریم:



$$|S| = 34, |A| = 15, |B| = 11, |C| = 9, |A \cap B| = 5, |A \cap C| = 3$$

$$, |B \cap C| = 6, |A' \cap B' \cap C'| = 10$$

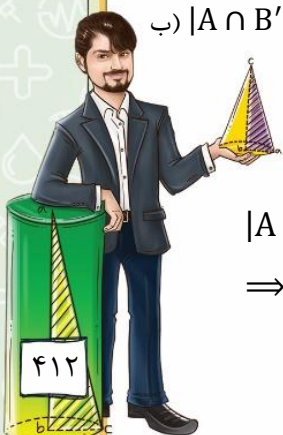
$$\text{الف)} |A \cup B \cup C| = |(A' \cap B' \cap C')'| = |S| - |A' \cap B' \cap C'| = 34 - 10 = 24$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} |A \cap B' \cap C'| &= |(A \cap (B \cup C)'| = |A - (B \cup C)| = |A| - |A \cap (B \cup C)| = |A| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 15 - 5 - 3 + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

از طرفی طبق قسمت الف داریم:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\Rightarrow 24 = 21 + |A \cap B \cap C| \Rightarrow |A \cap B \cap C| = 3$$





در نتیجه تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می کنند برابر است با:

$$|A \cap B' \cap C'| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10$$

$$\text{ج) } |B \cap C'| = |B - C| = |B| - |B \cap C| = 11 - 6 = 5$$

$$\text{د) } |A \cap B' \cap C'| + |(A' \cap B \cap C')| + |(A' \cap B' \cap C)|$$

$$= |A \cap (B \cup C')| + |B \cap (A \cup C')| + |C \cap (A \cup B)'|$$

$$= |A - (B \cup C)| + |B - (A \cup C)| + |C - (A \cup B)|$$

$$= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| + |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| + |C|$$

$$- |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 15 - 5 - 3 + 3 + 11 - 5 - 6 + 3 + 9 - 3 - 6 + 3 = 16$$

$$\text{الف) } |A \cup B \cup C| = 10 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$$

استفاده از نمودار ون:

$$\text{ب) } |A \cap B' \cap C'| = 15 - 2 - 3 - 0 = 10$$

$$\text{ج) } |B \cap C'| = 11 - 3 - 3 = 5$$

$$\text{د) } |A \cap B' \cap C'| + |A' \cap B \cap C'| + |A' \cap B' \cap C| = 10 + 3 + 3 = 16$$

۳. دو مجموعه A_1 و A_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم.

اعدادی که رقم ۴ را ندارند $A_2 =$ ، اعدادی که رقم ۳ را ندارند $A_1 =$

$$|A_1' \cap A_2'| = |S| - |A_1 \cup A_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 5^4 - 4^4 - 4^4 + 3^4 = 194$$

۴. حرکت به سمت بالا یا به سمت راست کوتاه ترین مسیر برای رسیدن از A به B است. بنابراین داریم:

از D عبور کنیم و از A به B برسیم $D =$ ، از C عبور کنیم و از A به B برسیم $C =$

$$|C \cap D'| = |C - D| = |C| - |C \cap D| = \left(\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \right) - \left(\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \right) = 102$$

۵. عدد پنج رقمی مورد نظر حتماً ارقام ۲ و ۳ و ۷ را داراست و فاقد رقم صفر می باشد و حتی ممکن است عدد چهارم

و پنجم آن هم از همین اعداد انتخاب گردد. پس سه مجموعه A_1 و A_2 و A_3 را به صورت مقابل تعریف می کنیم:

اعداد پنج رقمی که ۲ را دارا نمی باشند $A_1 =$ ، اعداد پنج رقمی که ۳ را دارا نمی باشند $A_2 =$ ، اعداد پنج رقمی که ۷ را دارا نمی باشند $A_3 =$





طبق آن چه در نکات اصل شمول و عدم شمول بیان کردیم، داریم:

$$\begin{aligned}
 |A_1' \cap A_2' \cap A_3'| &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
 &= |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
 |A_1| &= |A_2| = |A_3| = 8^5 \\
 |A_1 \cap A_2| &= |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 7^5 \\
 |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 6^5 \\
 \Rightarrow |A_1' \cap A_2' \cap A_3'| &= 90000 - 3 \times 8^5 + 3 \times 7^5 - 6^5 = 34341
 \end{aligned}$$

از آن جایی که امتحان کردن هر رمز ۶ ثانیه طول می کشد حداکثر زمان برای باز کردن این قفل برابر $34341 \times 6 = 206046$ ثانیه است.

۶. طبق درسنامه تعداد توابع از مجموعه A به مجموعه B برابر $1024 = 4^5$ تاست.

طبق درسنامه چون $|A| > |B|$ است بنابراین از مجموعه A به مجموعه B ، تابع یک به یک نوشت.

۷. تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل با پیدا کردن تعداد توابع یک به یک از مجموعه ای ۵ عضوی به

مجموعه ای ۸ عضوی است. اگر ۵ کتاب مختلف را a_1 تا a_5 بنامیم و روش توزیع کردن f باشد، داریم:

$$f = \{(a_1, \square), (a_2, \square), (a_3, \square), (a_4, \square), (a_5, \square)\}$$

در مربع ها نباید نام های تکراری از افراد باشد زیرا به هر نفر حداکثر باید یک کتاب داده باشیم.

$$\text{تعداد کل روش های توزیع کردن} = \frac{8}{f(a_1)} \times \frac{7}{f(a_2)} \times \frac{6}{f(a_3)} \times \frac{5}{f(a_4)} \times \frac{4}{f(a_5)} = (8)_5 = \frac{8!}{3!} = 6720$$

۸. تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشا از مجموعه ای ۶ عضوی به مجموعه

ای ۳ عضوی است. داریم:

A_3 = به داور سوم فیلم نرسد

A_2 = به داور دوم فیلم نرسد

A_1 = به داور اول فیلم نرسد

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3^6 - 2^6 - 2^6 - 2^6 + 1^6 + 1^6 + 1^6 - 0 = 540$$





۹. بیشترین تعداد روز در سال کبیسه (۳۶۶ روزی) رخ می دهد. اگر تعداد روزها را تعداد لانه ها و ۳۶۸ نفر را ۳۶۸ کبوتر در نظر بگیریم در این صورت طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار می گیرند. به عبارت بهتر حداقل دو نفر از این ۳۶۸ در یک روز متولد شده اند.

۱۰. می دانیم دو نوع عدد طبیعی وجود دارد که عبارتند از عدد طبیعی فرد و عدد طبیعی زوج. از طرفی می دانیم جمع دو عدد طبیعی هم نوع، عددی زوج می گردد. اگر ۳ عدد را ۳ کبوتر و ۲ نوع عدد طبیعی را ۲ لانه در نظر بگیریم طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار می گیرند. به عبارت بهتر حداقل دو عدد هم نوع در بین این سه عدد طبیعی وجود دارد که مجموع آن ها عددی زوج می شود.

۱۱. اگر اعضای مجموعه A را به ۴۲ مجموعه $\{1, 84\}, \{2, 83\}, \dots, \{42, 43\}$ افراز کنیم و این ۴۲ مجموعه را ۴۲ لانه و از طرفی ۴۳ عضو انتخابی از مجموعه A را ۴۳ کبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار می گیرند. به عبارت بهتر حداقل ۲ عدد وجود خواهند داشت که مجموعشان برابر ۸۵ است.

۱۲. $t_1 = 1, t_n = 85 \Rightarrow d = \frac{t_n - t_1}{n-1} \Rightarrow 4 = \frac{85-1}{n-1} \Rightarrow n-1 = 21 \Rightarrow n = 22$. بنابراین مجموعه A دارای ۲۲ عضو است. اگر مجموعه A را به ۱۲ مجموعه $\{1\}, \{45\}, \{5, 58\}, \{9, 81\}, \{13, 77\}, \dots$ و $\{41, 49\}$ افراز کنیم و از هر یک عضو انتخاب کنیم در بدترین حالت ۱۲ عضو وجود دارد که مجموع هیچ دوتایی از آن ها برابر ۹۰ نمی شود. اما اگر یک عضو دیگر از مجموعه A انتخاب کنیم در این صورت حتماً مجموع دو تا از اعضا برابر ۹۰ می گردد.

۱۳. اگر این مستطیل 6×8 را به صورت مقابل به ۱۲ مربع 2×2 تقسیم کنیم و آن ها را ۱۲ لانه فرض کنیم و از طرفی ۱۳ نقطه درون این مستطیل قرار دهیم و آن ها را ۱۳ کبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از نقاط به یکی از مربع های کوچک تعلق دارند. فاصله دو نقطه A و B با

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad \text{استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:}$$

همان طور که از شکل مشخص است طول های AH و BH از ۲ که طول ضلع مربع های کوچک است

$$AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < 2\sqrt{2} \quad \text{کمتر هستند. در نتیجه داریم:}$$





۱۴. می دانیم مختصات دو نقطه A و B از رابطه زیر به دست می آید.

$$B, A = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

برای صحیح شدن طول و عرض باید زوج و فرد بودن مختصات را بررسی کنیم. مختصات هر نقطه می تواند ۴ حالت زیر را داشته باشد.

$$(زوج و فرد), (فرد و زوج), (فرد و فرد), (زوج و زوج)$$

اگر این حالت ها را به عنوان ۴ لانه در نظر بگیریم و ۵ نقطه را ۵ کیبوتر فرض کنیم طبق اصل لانه کیبوتری حداقل دو تا از نقاط درون یک لانه قرار می گیرند. به عبارت بهتر حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه دارای حالت مشابه در مختصاتشان می باشند. در صورتی که دو نقطه دارای حالت مشابه در مختصاتشان باشند، مجموع طول ها و مجموع عرض های آن عددی زوج می باشند بنابراین نقطه وسط آن ها حتماً دارای مختصات صحیح است.

۱۵. ابتدا جعبه ها را شماره گذاری می کنیم و به اندازه شماره جعبه ها، از درون جعبه ها سیب خارج می کنیم اگر همه

۱۰ جعبه دارای سیب های ۱۰ گرمی باشند، مجموع سیب های خارج شده برابر ۵۵۰ گرم می شود اما اکنون یکی از

جعبه های دارای سیب های ۹ گرمی است اگر n ($1 \leq n \leq 10$) شماره جعبه مورد نظر باشد بنابراین وزن سیب

های خارج شده به اندازه n گرم از ۵۵۰ گرم کمتر است. (یک مهندس خوب برای بارور کردن ایده های علمی خود

نیاز به ترکیبیات و مسائل هوش دارد. چنانچه بیل گیتس ثروت خود را مدیون ترکیبیات و علوم کامپیوتر می داند.

در آینده از این دست مسائل زیاد حل می کنیم.)





پرسش های چهار گزینه ای

۱. چند عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی با ۹۹۹ وجود دارد که مجموع ارقامشان برابر با ۱۴ باشد؟

۷۵ (۴)

۸۵ (۳)

۸۰ (۲)

۷۰ (۱)

۲. چند عدد دو رقمی در مبنای ۱۰ وجود دارد که مجموع ارقامشان ۱۱ شود؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۱۰ (۱)

۳. تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ کدام است به طوری که $x_i \leq 2$ باشد؟

($i = 1, 2, 3$)

۱۵ (۴)

۶ (۳)

۹ (۲)

۵ (۱)





۴. تعداد جواب های صحیح و نامنفی $x + y + z = 8$ کدام است به طوری که $2 \leq x \leq 3$ و $4 \leq y \leq 8$ و $z \geq 1$ باشد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۵. معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $1 \leq x_i \leq 7$ باشد؟
($i = 1, 2, 3$)

- ۳۲ (۱) ۳۳ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴)

۶. درون و روی مربع 8×8 مقابل چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد به طوری که مجموع طول و عرض آن برابر ۱۱ باشد؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۷. سه نقطه $A(0, 8, 0)$ ، $B(8, 0, 0)$ و $C(0, 0, 8)$ را به هم وصل می کنیم تا مثلث ABC تشکیل شود. چند نقطه با مختصات صحیح درون این مثلث قرار دارد؟

- ۳۶ (۱) ۲۱ (۲) ۱۵ (۳) ۴۵ (۴)





۸. معادله $x + y + z = 8$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به طوری که $4 < x < 3$ ، $y < 3$ و $z \leq 5$ باشند؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۹. معادله $x + y + z = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $5 \leq x$ و $4 \leq z$ باشد؟

۲۵ (۴)

۲۸ (۳)

۳۵ (۲)

۳۰ (۱)

۱۰. معادله $x + y + z = 10$ در مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند جواب دارد؟

۱۸ (۴)

۲۱ (۳)

۲۴ (۲)

۳۶ (۱)

۱۱. نامعادله $x_1^3 + x_2 + x_3 \leq 20$ چند جواب صحیح دارد به طوری که $2 \leq x_i \leq 4$ باشد؟ ($i = 1, 2, 3$)

۶ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)





۱۲. به چند طریق می توان ۴ نفر را در ۳ اتاق متمایز اسکان داد به طوری که در هر اتاق حداقل یک نفر قرار گیرد؟

۴۸ (۱) ۲۰ (۲) ۳۶ (۳) ۲۴ (۴)

۱۳. چند عدد سه رقمی وجود دارد که در هر یک از آن ها رقم های ۰ و ۵ حداقل یک بار قرار داشته باشد؟

۳۵ (۱) ۵۲ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴)

۱۴. در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ چند عدد بر اعداد ۲ یا ۳ بخش پذیرند؟

۳۸ (۱) ۳۷ (۲) ۳۶ (۳) ۳۳ (۴)

۱۵. در مجموعه $\{25, 26, 27, \dots, 50\}$ چند عدد بر اعداد ۲ یا ۵ بخش پذیرند؟

۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴)





۱۶. در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ چند عدد بر اعداد ۳ و ۷ بخشپذیر نیستند؟

۶۵ (۴)

۱۱۵ (۳)

۸۵ (۲)

۱۳۵ (۱)

۱۷. در چند عدد سه رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ هر دو رقم ۳ و ۴ ظاهر می شوند؟ (تکرار مجاز است)

۳۳۴ (۴)

۲۵۶ (۳)

۱۹۴ (۲)

۱۵۶ (۱)

۱۸. در چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ دقیقاً دو عدد از سه عدد فرد ظاهر می شوند؟ (تکرار مجاز است)

۳۶۰ (۴)

۴۱۱ (۳)

۳۱۴ (۲)

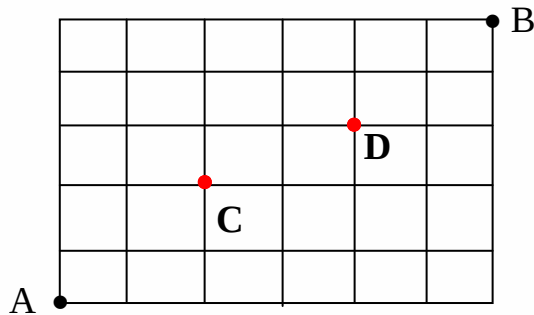
۳۳۰ (۱)





۱۹. اگر فقط بتوان به سمت بالا یا به سمت راست حرکت کرد، به چند طریق می توان از A به B رسید به

طوری که از C بگذریم ولی از نقطه D گذر نکرده باشیم؟



(۱) ۱۴۲

(۲) ۱۰۲

(۳) ۱۴۸

(۴) ۱۰۸

۲۰. در چند جایگشت از حروف کلمه NIMA هیچ کدام از حروف N و M و A در جای اصلی خود قرار ندارد؟

(۴) ۱۱

(۳) ۹

(۲) ۱۸

(۱) ۱۲

۲۱. در چند جایگشت از حروف کلمه MEHDI حداقل یکی از حروف M و H و D در جای اصلی خود قرار

دارد؟

(۴) ۵۶

(۳) ۵۸

(۲) ۶۴

(۱) ۶۲





۲۲. با ارقام ۱، ۲، ۳، ...، ۸ چند عدد هشت رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت به طوری که حداقل دو تا از

اعداد ۱۲۳ و ۴۵۶ و ۸۷ در آن وجود داشته باشند؟ (مانند عدد ۱۲۳۷۴۶۵۸)

(۱) ۲۲۸ (۲) ۲۴۰ (۳) ۲۵۲ (۴) ۲۶۴

۲۳. به چند طریق می توان ۵ کارت با رنگ های مختلف را در ۳ پاکت قرار داد به طوری که در دو پاکت اول

حداقل یک کارت قرار بگیرد؟

(۱) ۱۳۶ (۲) ۱۳۴ (۳) ۱۷۰ (۴) ۱۸۰

۲۴. در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا بر ۵ یا بر ۷ بخش پذیر باشند؟

(۱) ۶۶ (۲) ۶۷ (۳) ۶۵ (۴) ۶۴

۲۵. در مجموعه $\{21, 22, 23, \dots, 100\}$ چند عدد وجود دارد که نه بر ۳ و نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیرند؟

(۱) ۴۸ (۲) ۳۶ (۳) ۴۶ (۴) ۳۵





۲۶. چهار عدد ۴،۳،۲،۱ را به تصادف در چهار جای خالی که به ترتیب از چپ به راست با شماره های ۱ تا ۴ شماره گذاری شده اند قرار می دهیم. به چند طریق امکان دارد حداقل یکی از اعداد ۴،۳،۲ در جایگاه هم شماره خودش قرار گرفته باشد؟

(۴) ۱۳

(۳) ۹

(۲) ۱۵

(۱) ۱۴

۲۷. در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 78\}$ چند عدد وجود دارد که بر ۲ بخش پذیرند ولی بر ۳ یا ۵ بخش پذیر نمی باشند؟

(۴) ۳۰

(۳) ۲۴

(۲) ۲۱

(۱) ۱۸

۲۸. به چند طریق می توان ۴ کارت با رنگ های قرمز، آبی، سبز و زرد را در ۳ پاکت مختلف قرار داد به طوری که هیچ پاکتی خالی نماند؟

(۴) ۴۶

(۳) ۳۵

(۲) ۴۵

(۱) ۳۶





۲۹. در مجموعه $\{1, 2, \dots, 150\}$ چند عدد وجود دارد که بر ۷ بخش پذیر باشند ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۱۷

۳۰. در مجموعه $\{200, 201, 202, \dots, 700\}$ چند عدد وجود دارد که بر ۸ یا ۵ بخش پذیر باشند؟

- (۱) ۱۶۹ (۲) ۱۶۷ (۳) ۱۵۹ (۴) ۱۵۱

۳۱. در مجموعه اعداد طبیعی کوچک تر از ۲۰۲ چند عدد وجود دارد که نه بر ۵ و نه بر ۹ بخش پذیر باشد؟

- (۱) ۱۴۳ (۲) ۱۴۲ (۳) ۱۴۴ (۴) ۱۴۵

۳۲. چهار نفر هنگام ورود به یک خانه کلاه های خود را آویزان می کنند و هر یک هنگام خروج یکی از کلاه ها

را به تصادف بر می دارند. به چند طریق امکان دارد که از بین ۳ نفر اول حداقل یک نفر کلاه خود را بردارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۳ (۳) ۹ (۴) ۱۵





۳۳. چهار نفر که هر کدام دارای یک کلاه می باشند به چند طریق می توانند کلاه های خود را با هم عوض

کنند به طوری که از بین این ۳ نفر اول هیچ کدام کلاه خود را در اختیار نداشته باشد؟

۱۵ (۴)

۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۳۴. چند عدد در مجموعه $\{1, 2, \dots, 92\}$ وجود دارد که نسبت به ۳۶ اول نباشد؟

۳۱ (۴)

۳۵ (۳)

۲۹ (۲)

۳۳ (۱)

۳۵. چند عدد در مجموعه $\{18, 19, 20, \dots, 197\}$ وجود دارد که نسبت به ۱۰۵ اول هستند؟

۱۰۸ (۴)

۱۱۶ (۳)

۶۴ (۲)

۷۲ (۱)

۳۶. در یک نظرخواهی از ۱۰۰ دانش آموز، ۶۰ نفر مجله A، ۵۰ نفر مجله B و ۵۰ نفر مجله C را می خوانند. اگر

۳۰ نفر مجله های A و B و ۲۰ نفر مجله های B و C و ۴۰ نفر مجله های A و C و ۱۰ نفر هر سه مجله را

بخوانند، چند نفر فقط یک مجله را می خوانند؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

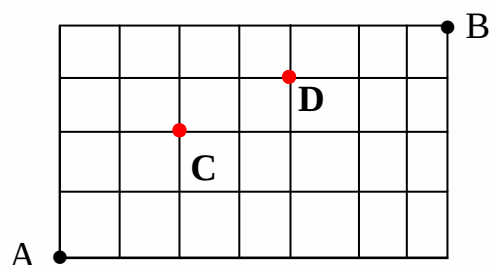
۵ (۱)





۳۷. اگر فقط بتوان به سمت بالا یا به سمت راست حرکت کرد به چند طریق می توان از A به B رسید به

طوری که از C و D گذر نکنیم؟



۱۴۶ (۱)

۱۲۶ (۲)

۱۳۶ (۳)

۱۵۶ (۴)

۳۸. سه گوی قرمز با شماره های ۱ تا ۳، سه گوی آبی با شماره های ۱ تا ۳ و سه گوی زرد با شماره های ۱ تا

۳ موجود است. به چند طریق می توان ۳ گوی انتخاب کرد به طوری که هم گوی قرمز و هم گوی آبی در

بین این سه گوی موجود باشد؟

۵۴ (۴)

۵۲ (۳)

۴۸ (۲)

۴۵ (۱)

۳۹. به چند طریق می توان بین چهار روستای a, b, c, d جاده کشید به طوری که دقیقاً یکی از روستاها تنها

باشد (به هیچ روستایی وصل نباشد)؟

۲۰ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۲۴ (۱)





۴۰. به چند طریق می توان پنج گوی به شماره های ۱ تا ۵ را درون پنج جعبه به شماره های ۱ تا ۵ قرار داد به

طوری که دقیقاً دو تا از گوی های درون جعبه هم شماره خود قرار گیرد؟

۱۰ (۴)

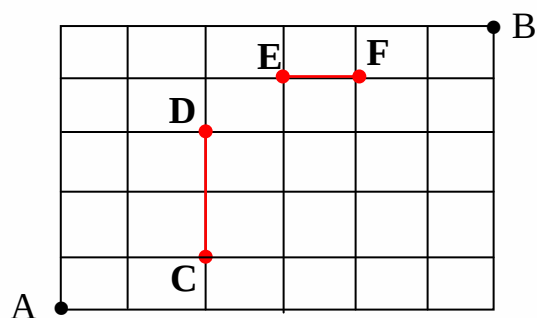
۴۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

۴۱. اگر فقط بتوان به سمت بالا یا به سمت راست حرکت کرد به چند طریق می توان از A به B رسید به طوری

که از مسیرهای CD و EF عبور نکنیم؟



۱۲۰ (۱)

۱۲۵ (۲)

۱۳۵ (۳)

۱۳۰ (۴)

۴۲. اگر مجموعه های A و B و C به ترتیب دارای ۲۵ و ۲۱ و ۱۷ عضو و مجموعه $A \cap B \cap C$ دارای ۱۲ عضو

باشد در این صورت صورت مجموعه $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$ حداقل دارای چند عضو است؟

۳۶ (۴)

۳۰ (۳)

۲۷ (۲)

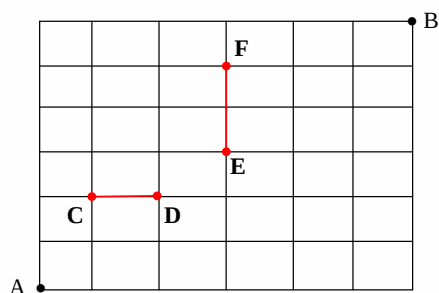
۲۵ (۱)





۴۳. اگر بتوان فقط به سمت بالا یا به سمت راست حرکت کرد به چند طریق می توان از A به B رسید به

طوری که حداقل از یکی از مسیرهای CD و EF عبور کنیم؟



(۱) ۲۵۶

(۲) ۲۷۶

(۳) ۲۹۶

(۴) ۲۶۶

۴۴. تاسی را سه بار پرتاب می کنیم. به چند طریق امکان دارد مجموع اعداد رو شده برابر ۲۰ شود؟

(۴) ۹۶

(۳) ۸۴

(۲) ۷۲

(۱) ۷۸

۴۵. چند عدد چهار رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۲۰ باشد به طوری که یکی از ارقام آن عدد ۳

باشد؟

(۴) ۲۶۳

(۳) ۲۴۶

(۲) ۲۲۱

(۱) ۱۸۳





۴۶. به چند طریق می توان ۶ گوی با شماره های ۱ تا ۶ را در ۶ جعبه با شماره های ۱ تا ۶ قرار داد به طوری که دقیقاً ۳ تا از آن ها در جعبه هم شماره خود قرار گیرد؟

(۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۶۰ (۴) ۳۰

۴۷. چند عدد سه رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۱۴ باشد؟

(۱) ۷۰ (۲) ۶۵ (۳) ۶۸ (۴) ۷۲

۴۸. ۱۰ گوی داریم که بر روی آن ها ارقام ۱ تا ۱۰ را حک کرده ایم. به چند طریق می توان ۳ تا از این گوی ها را انتخاب کرد به طوری که از بین گوی های ۳ و ۸ و ۹ حداقل یکی و هم چنین از بین گوی های ۱ و ۲ و ۴ نیز حداقل یکی انتخاب شود؟

(۱) ۸۱ (۲) ۴۵ (۳) ۵۴ (۴) ۶۴

۴۹. اگر مجموعه A دارای ۵ عضو و مجموعه B دارای ۲ عضو باشد، چند تابع پوشا از A به B می توان نوشت؟

(۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴) ۳۰





۵۰. به ازای چند عدد a از مجموعه $\{1, 2, \dots, 250\}$ معادله $105x + ay = 1$ جواب دارد؟

۱۱۶ (۴)

۱۱۵ (۳)

۱۱۴ (۲)

۱۱۳ (۱)

۵۱. چند تابع پوشا از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ به مجموعه $\{1, 2, 3\}$ می توان نوشت؟

۱۵۳ (۴)

۱۵۰ (۳)

۱۴۳ (۲)

۱۶۰ (۱)

۵۲. به چند طریق می توان ۱۱ خودکار یکسان را بین ۳ نفر تقسیم کرد به طوری که به هر نفر حداکثر ۷ خودکار برسد؟

۵۲ (۴)

۵۴ (۳)

۴۵ (۲)

۴۸ (۱)

۵۳. در چند جایگشت از حروف کلمه NAVID دقیقاً دو تا از حروف در جای اصلی خود قرار دارند؟

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۱۰ (۲)

۳۰ (۱)





۵۴. چند تابع پوشا و چند تابع یک به یک از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4\}$ می توان

نوشت؟

۱۲-۱۲ (۴)

۲۴-۱۲ (۳)

۲۴-۲۴ (۲)

۱۲-۲۴ (۱)

۵۵. چند تابع یک به یک از مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می توان نوشت؟

۱۲۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۶۰ (۲)

۱۸۰ (۱)

۵۶. به چند طریق می توان ۴ سکه مختلف را بین ۷ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک

سکه نداشته باشد؟

۸۴۰ (۴)

۲۱۰ (۳)

۷۲۰ (۲)

۶۱۰ (۱)

۵۷. به چند طریق می توان ۳ کتاب ریاضی، فیزیک و شیمی سال دوازدهم را بین ۸ نفر توزیع کرد به طوری

که هیچ کس بیشتر از یک کتاب نداشته باشد؟

۶۷۲۰ (۴)

۲۰۱۶ (۳)

۱۰۰۸ (۲)

۳۳۶ (۱)





۵۸. به چند طریق می توان ۵ خودکار مختلف را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداقل یک

خودکار برسد؟

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۵۰

۵۹. چند تابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3\}$ می توان نوشت به طوری که در هر یک

از آن ها هر دو عضو ۳ و ۲ عضوی از برد تابع باشند؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۵۲

۶۰. چند تابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{1, 5, 9\}$ می توان نوشت به طوری که پوشا نباشد؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۴۵ (۳) ۳۶ (۴) ۳۵

۶۱. چند تابع پوشا از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4\}$ می توان نوشت به طوری که فقط

یک عضو به عضو هم شماره خود متناظر شود؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۴





فصل سوم: ترکیبیات

۶۲. چند تابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ می توان نوشت که هم پوشا و هم

یک به یک باشد و فقط سه عضو به عضو هم شماره خود متناظر شود؟

- ۴۰ (۱) ۳۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۰ (۴)

۶۳. در یک کلاس ۴۳ نفره، حداقل چند نفر دارای روز تولد یکسان در هفته هستند؟

- ۷ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۶۴. ۱۷۰ عدد را به تصادف انتخاب می کنیم. حداقل باقی مانده چند تا از آن ها بر ۱۳ یکسان است؟

- ۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

۶۵. مدیر یک بانک با توجه به تجربه شخصی خود می داند که در ساعت شلوغی حداکثر ۵۰

مشتری به آن بانک مراجعه می کند. این مدیر حداقل چند کارمند پشت باجه قرار دهد تا

مطمئن باشد، صف هر باجه بیشتر از ۶ نفر نمی شود؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)





۶۶. دست کم چند نفر در اختیار داشته باشیم تا مطمئن شویم حداقل ۳ نفر از آن ها در یک ماه از سال و در

یک روز از هفته متولد شده اند؟

۱۶۹ (۴)

۱۷۰ (۳)

۱۶۸ (۲)

۱۷۱ (۱)

۶۷. در یک کلاس ۹۲ نفره حداقل چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۶۸. ۳۵ تیم ورزشی را در ۶ گروه دسته بندی می کنیم. کدام گزینه درست است؟

(۱) حداقل یکی از گروه ها دارای ۷ تیم است.

(۲) حداقل یکی از گروه ها دارای ۶ تیم است.

(۳) حداقل یکی از گروه ها دارای لااقل ۶ تیم است.

(۴) حداقل یکی از گروه ها دارای لااقل ۷ تیم است.

۶۹. مجموعه ای دارای ۷۳۴ زیرمجموعه است. اگر زیرمجموعه ها دارای ۵۲ تا ۲۵۰ عضو باشند در این صورت

این مجموعه حداقل دارای چند زیرمجموعه با تعداد عضوهای برابر است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)





۷۰. در یک گراف ساده از مرتبه p ، ماکسیمم درجه ۵ است حداقل مقدار p چقدر باشد تا مطمئن شویم دست

کم ۳ رأس هم درجه داریم؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۷۱. در یک شهرک ۵۷۱ نفر با رنگ پوست های سفید، سیاه، زرد و سرخ زندگی می کنند. حداقل چند نفر از آن

ها دارای رنگ پوست مشابه می باشند؟

- ۱۴۲ (۱) ۱۴۳ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۴۵ (۴)

۷۲. ۲۹ مهاجم با حداکثر چند لیگ برتری می توانند قرارداد ببندند به طوری که حداقل یکی از تیم ها با ۳

مهاجم قرارداد بسته باشد؟

- ۱۳ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴)

۷۳. ۳۷ کتاب را در حداکثر چند قفسه یک ویتترین می توان جا داد به طوری که حداقل در یکی از قفسه ها

۵ کتاب وجود داشته باشد؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)





۷۴. دست کم چند نفر در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شویم حداقل ۴ تای آن ها در یک ماه به

دنیا آمده اند؟

۴۹ (۴)

۴۸ (۳)

۳۸ (۲)

۳۷ (۱)

۷۵. تعداد زیادی کتاب ریاضی و فیزیک پایه یازدهم و دوازدهم دبیرستان در یک کتاب خانه موجود است.

حداقل چند کتاب برداریم تا مطمئن شویم از یک نوع کتاب (از نظر درس و پایه) حداقل ۱۱ کتاب داریم؟

۴۲ (۴)

۴۱ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

۷۶. ۲۵ کبوتر را حداکثر در چند لانه می توان جا داد به شرط آن که حداقل در یکی از لانه ها دست کم ۳

کبوتر وجود داشته باشد؟

۱۱ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

۷۷. حداقل چند عدد طبیعی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم تفاضل حداقل ۲ عدد بر ۵ و ۷ بخش پذیر است؟

۷۲ (۴)

۳۶ (۳)

۳۵ (۲)

۷۱ (۱)





۷۸. در کدام مجموعه حداقل دو عضو دارای باقی مانده یکسان در تقسیم بر عدد ۱۰ هستند؟

$$(1) \{a^{10}, a^{10} + 1, a^{10} + 2, \dots, a^{10} + 9\}$$

$$(2) \{a - 9, a - 8, \dots, a\}$$

$$(3) \{a + b, a + b + 11, \dots, a + b + 99\}$$

$$(4) \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + 10\}$$

۷۹. حداکثر چند نفر می توانیم داشته باشیم به طوری که در هیچ روزی از هفته بیش از ۳ نفر متولد نشده باشند؟

$$22 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

$$21 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

۸۰. در یک همایش حداکثر چند نفر حضور داشته باشند تا مطمئن شویم هیچ ۵ نفری وجود ندارد که در یک روز از هفته و یک ماه سال متولد شده باشند؟

$$421 \quad (4)$$

$$420 \quad (3)$$

$$337 \quad (2)$$

$$336 \quad (1)$$





۸۱. ۴۵ کارت حداکثر دارای چند رنگ مختلف باشند تا از یکی از رنگ ها حداقل ۶ کارت داشته باشیم؟

۶ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)



۸۲. حداقل با چند نفر در یک خیابان مصاحبه کنیم تا مطمئن شویم ۴ نفر از آن ها در یک روز هفته متولد

شده اند؟

۲۱ (۴)

۲۲ (۳)

۳۳ (۲)

۳۲ (۱)



۸۳. ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از ۲ کبوتر قرار داشته باشند؟

۳۴ (۴)

۳۳ (۳)

۳۲ (۲)

۳۱ (۱)





۸۴. مدرسه ای دارای n دانش آموز است. حداقل مقدار n چقدر است تا مطمئن شویم در آن مدرسه حداقل دو دانش آموز وجود دارند به طوری که هم حرف اول اسم آن ها و هم حرف اول نام خانوادگی آن ها یکسان باشد؟

- (۱) ۱۰۲۵ (۲) ۹۹۳ (۳) ۱۰۶۵ (۴) ۹۶۲

۸۵. حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن شویم حداقل ۳ نفر از آن ها دو حرف اول و دوم فامیلیشان غیر تکراری و مثل هم است؟

- (۱) ۱۹۲۳ (۲) ۱۹۶۷ (۳) ۱۹۸۵ (۴) ۲۰۴۹

۸۶. در یک جعبه ۴ مهره سیاه، ۳ مهره سفید، ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. حداقل چند مهره باید از جعبه خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل سه نوع رنگ متمایز در مهره های انتخابی وجود دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۷





۸۷. اگر ۳۲ مهره را در n جعبه چنان پخش کنیم که در هر جعبه حداکثر ۵ مهره قرار گیرد، در این صورت

حداقل مقدار n کدام است؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

۸۸. در یک کلاس حداقل چند دانش آموز باید حضور داشته باشند تا دست کم اسامی چهار نفر از آن ها با

حرف اول یکسان آغاز شود؟

- ۹۷ (۱) ۱۲۹ (۲) ۹۸ (۳) ۱۳۰ (۴)

۸۹. حداقل چند عضو از مجموعه $\{۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل یکی بر دیگری

بخش پذیر است؟

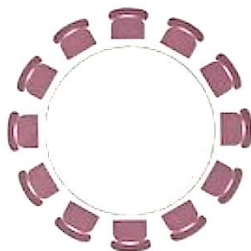
- ۶ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)





۹۰. حداقل چند نفر را روی صندلی های شکل مقابل بنشانیم تا مطمئن شویم حداقل ۲ نفر روبه روی هم

نشسته اند؟



۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

۹۱. در جعبه ای ۴ مهره قرمز، ۳ مهره سیاه و ۷ مهره آبی وجود دارد. حداقل چند مهره از این جعبه بیرون

آوریم تا مطمئن شویم حداقل ۶ مهره هم رنگ از این جعبه خارج کرده ایم؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۹۲. از بازه (۰,۶) حداقل چند عدد حقیقی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم جز صحیح حداقل ۸ تا از آن با هم

برابر است؟

۵۰ (۴)

۵۱ (۳)

۴۳ (۲)

۴۴ (۱)

۹۳. ۴۵ عدد حقیقی از بازه (۰,۶) انتخاب می کنیم. جز صحیح حداقل چند تا از آن ها با هم برابرند؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)





۹۴. ۴۱ نقطه درون یک مستطیل ۵×۲ قرار دارند. حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصله آن ها از هم بیشتر

از نمی باشد.

(۴) $\sqrt{۲}$

(۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

(۲) $\frac{۱}{۲}$

(۱) ۱

۹۵. در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۸، دست کم چند نقطه قرار دهیم تا مطمئن شویم فاصله حداقل دو

تا از آن ها بیشتر از $\frac{۱}{۲}$ نیست؟

(۴) ۲۵۷

(۳) ۱۲۹

(۲) ۵۱۳

(۱) ۶۵

۹۶. ۲۶ نقطه درون مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۲۵ قرار دارند. حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصله آن

ها از هم بیشتر از نمی باشد.

(۴) ۱۰

(۳) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

(۲) ۵

(۱) $۵\sqrt{۲}$





۹۷. مجموعه S زیر مجموعه n عضوی از $\{1, 2, \dots, 21\}$ است. حداقل مقدار n چند باشد تا مطمئن شویم

حداقل ۲ زیرمجموعه متمایز از S دارای مجموع اعضای برابر می باشند؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۹۸. حداقل چند نقطه روی یک دایره به شعاع ۲ قرار گرفته باشند تا مطمئن شویم حداقل ۲ تا از آن ها فاصله

ای کمتر از ۲ دارند؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۹۹. حداقل چند عضو از مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم تفاضل حداقل دو تا از آن ها ۷

است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۱۰۰. حداقل چند عدد از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حاصل ضرب ۲ تا از آن

ها مربع کامل است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵





۱۰۱. چند تابع پوشا مانند f از مجموعه $\{a, b, c, d\}$ به مجموعه $\{1, 2, 3\}$ وجود دارد به طوری که $f(a) = 1$

باشد؟

۱۳ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

۱۰۲. ۵ دانشجوی کارشناسی، پروژه ای را در دو سال، ۲ دانشجوی کارشناسی ارشد همان پروژه را در چهار

سال و ۳ دانشجوی دکتری همان پروژه را در یک سال انجام می دهند. اگر یک دانشجوی دکتری و یک

دانشجوی کارشناسی ارشد در این پروژه حضور داشته باشند، حداقل چند دانشجوی کارشناسی لازم

است تا پروژه در حداکثر یک سال به اتمام برسد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۰۳. چند عدد شش رقمی می توان با اعداد ۳، ۵، ۷ نوشت به طوری که هر عدد حداقل یک بار ظاهر شود؟

۳۶۰ (۴)

۵۴۰ (۳)

۷۲۰ (۲)

۲۷۰ (۱)





۱۰۴. حداقل چند نقطه روی یک دایره به شعاع ۲ قرار گرفته باشند تا مطمئن شویم حداقل ۲ تا از آن ها فاصله ای کمتر از $2\sqrt{2}$ دارند؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۶

(۱) ۷

۱۰۵. ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار داشته باشد؟

(سراسری ریاضی ۸۱)

(۴) ۳۴

(۳) ۳۳

(۲) ۳۲

(۱) ۳۱

۱۰۶. چند عدد صحیح مثبت کوچک تر از ۳۰۱ وجود دارد که نسبت به ۷۵ و ۶۰ اول باشند؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

(۴) ۱۸۰

(۳) ۸۰

(۲) ۴۰

(۱) ۱۶۰

۱۰۷. کمترین تعدادی افرادی که حداقل دو نفر از آن ها در یک ماه از سال و در یک روز هفته متولد شده اند

(سراسری ریاضی ۸۲)

کدام است؟

(۴) ۸۸

(۳) ۸۵

(۲) ۷۸

(۱) ۷۵





(سراسری ریاضی ۸۲)

۱۰۸. چند عدد سه رقمی وجود دارد که نه بر ۵ تقسیم پذیر باشند و نه بر ۶؟

۶۳۰ (۴)

۶۰۰ (۳)

۵۷۰ (۲)

۵۴۰ (۱)



۱۰۹. از ۵۱ دانش آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو

(سراسری ریاضی ۸۲)

شرکت کرده اند. چند نفر از آن ها در هیچ یک از دو کلاس شرکت ننموده اند؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



۱۱۰. به ازای چند مقدار a از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ معادله سیاله $ax + 18y = 3$ دارای جواب است؟

(آزاد ریاضی ۸۲)

۲۷ (۴)

۱۸ (۳)

۲۵ (۲)

۲۲ (۱)



۱۱۱. در یک کلاس ۵۴ نفری، دست کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)





(آزاد ریاضی ۱۴)

۱۱۲. چند تابع پوشا از $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به $B = \{1, 2\}$ می توان نوشت؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۳ (۳) ۳۱ (۴) ۳۰

(آزاد ریاضی ۱۴)

۱۱۳. چند تابع پوشا از $A = \{a, b, c\}$ به $B = \{1, 2, 3\}$ وجود دارد؟

- (۱) ۹ (۲) ۲۷ (۳) ۶ (۴) صفر

(آزاد ریاضی ۱۵)

۱۱۴. معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چند جواب صحیح غیرمنفی با شرط $3 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4$ دارد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۳ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

(سراسری ریاضی ۱۸)

۱۱۵. در یک کلاس ۴۰ نفری، ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه اند. انتخاب شونده باید رأی بیشتری از سایرین داشته باشد، حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸





۱۱۶. اگر S زیرمجموعه ای ۵۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد در تقسیم هر یک از اعضای S بر عدد ۱۶، تعداد

(فارج ریاضی ۱۸)

عضوهای باقی مانده چگونه است؟

(۱) درست ۳ عضو (۲) دست کم ۳ عضو

(۳) کمتر از ۴ عضو (۴) دست کم ۴ عضو

۱۱۷. حداقل چند عدد از مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 30\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم لااقل دو عدد آن ها مقسوم

(سراسری ریاضی ۱۹)

علیه مشترک غیر ۱ دارند؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۱۱۸. حداقل چند دوتایی مرتب از اعداد صحیح انتخاب کنیم. تا به طور قطع لااقل در دو جفت انتخاب

(فارج ریاضی ۱۹)

شده (a, b) و (c, d) حاصل هر دو عدد $a + c$ و $b + d$ زوج باشند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶





۱۱۹. مجموعه S دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوهای S بر ۱۲ حداقل چند عضو باقی مانده

یکسان دارند؟

(سراسری ریاضی ۹۰)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

(سراسری ریاضی ۹۰)

۱۲۰. تعداد اعداد طبیعی دو رقمی که نسبت به ۱۰۵ اول باشند، کدام است؟

۴۲ (۴)

۴۱ (۳)

۴۰ (۲)

۳۹ (۱)

(آزاد ریاضی ۹۰)

۱۲۱. چند عدد طبیعی کوچک تر از ۲۹۰ وجود دارد که نسبت به اعداد ۲، ۳ و ۵ اول باشند؟

۷۵ (۴)

۷۶ (۳)

۷۸ (۲)

۷۷ (۱)

۱۲۲. در جعبه ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج

(فارج ریاضی ۹۰)

کنیم تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی خارج شده هم رنگ باشند؟

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)





۱۲۳. چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} : 150 < n < 500\}$ نه بر ۷ تقسیم پذیرند و نه بر ۱۱؟ (فارج ریاضی ۹۱)

- (۱) ۲۷۱ (۲) ۲۷۲ (۳) ۲۷۳ (۴) ۲۷۴

۱۲۴. چند عدد طبیعی کوچک تر از ۲۳۱، با شرط $[231, a] = 231a$ وجود دارد؟ (فارج ریاضی ۹۱)

- (۱) ۱۱۶ (۲) ۱۱۸ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۲۴

۱۲۵. حداقل چند زوج مرتب به صورت (a, b) با مختص های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم، تا مطمئن شویم در دو زوج انتخابی، جمع مختص های اول و جمع مختص های دوم اعدادی زوج هستند؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۶. هر زیرمجموعه n عضوی از $\{1, 2, 3, 4, \dots, 23\}$ به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ می باشد. حداقل n کدام است؟ (فارج ریاضی ۹۳)

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳





۱۲۷. به چند طریق می توان ۹ توپ یکسان را در ۴ سبد متمایز جای داد به طوری که در هر سبد حداقل یک

(فارج ریاضی ۹۳)

توپ و حداکثر ۴ توپ جای گیرد؟

۵۶ (۴)

۴۰ (۳)

۳۶ (۲)

۳۵ (۱)

۱۲۸. هر یک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته و در یک کیسه قرار می دهیم. حداقل چند

گوی بیرون آوریم تا به طور یقین دست کم دو عدد با مقسوم علیه مشترک بزرگ تر از ۱ داشته باشیم؟

(سراسری ریاضی ۹۳)

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۱۲۹. تعداد ۳ تایی های مرتب با مختص های صحیح و غیرمنفی، به طوری که مجموع هر سه مختص برابر ۱۰

(سراسری ریاضی ۹۳)

و هر مختص کمتر از ۶ باشد کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)





۱۳۰. در کیسه ای ۹۰ گوی یکسان قرار دارد که هر یک از اعداد دو رقمی بر روی آن ها نوشته شده است.

حداقل چند گوی از کیسه خارج کنیم، تا مطمئن شویم جمع دو عدد از دو گوی خارج شده برابر ۱۱۰

می باشد؟

(فارج ریاضی ۹۳)

۴۸ (۴)

۴۷ (۳)

۴۶ (۲)

۴۵ (۱)

۱۳۱. تعداد جواب های صحیح و غیرمنفی، معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ، با شرط $x_1 > 4$ و $x_3 \leq 4$ کدام

است؟

(فارج ریاضی ۹۳)

۲۸ (۴)

۲۵ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

۱۳۲. اگر S زیرمجموعه ۱۱۵ عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم عضوهای S بر ۲۷ به طور یقین حداقل

چند عضو دارای یک باقی مانده هستند؟

(سراسری ریاضی ۹۴)

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)





۱۳۳. مجموعه S اعداد طبیعی فرد و مضرب ۳ شروع از ۳ و ختم به ۶۳ است. یک زیرمجموعه حداقل چند

عضوی از S انتخاب شود تا مطمئن باشیم شامل دو عضو با مجموع ۶۶ می باشد؟ (فارج ریاضی ۹۴)

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۳۴. تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ با شرط $1 \leq x_i \leq 5$ کدام است؟

(فارج ریاضی ۹۴)

۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

۱۳۵. یک تاس همگن را حداقل چند بار پرتاب کنیم، تا به طور یقین سه بار یا بیشتر، نتیجه یکسان داشته

باشیم؟ (سراسری ریاضی ۹۵)

۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴)

۱۳۶. در کیسه ای ۵ گوی سفید و ۴ گوی قرمز و ۳ گوی سبز وجود دارد. حداقل چند گوی از کیسه خارج

کنیم تا مطمئن باشیم بیش از ۳ گوی سفید یا بیش از ۲ گوی قرمز خارج شده است؟ (فارج ریاضی ۹۵)

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)





۱۳۷. در کیسه ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۳ مهره سبز موجود است. دست کم چند مهره از کیسه

بیرون آوریم تا مطمئن باشیم، لااقل ۴ مهره سفید یا ۳ مهره سیاه یا ۲ مهره سبز بیرون آمده است؟

(سراسری ریاضی ۹۶)

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۱۳۸. در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز و ۷ مهره آبی و ۱ مهره زرد موجود است. حداقل چند

مهره از کیسه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم ۳ مهره هم رنگ یا بیشتر از کیسه خارج شده است؟

(فارج ریاضی ۹۶)

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۱۳۹. از بین ۴ شاخه گل قرمز و ۵ شاخه گل زرد و ۸ شاخه گل سفید، به چند طریق می توان ۶ شاخه متمایز

(فارج ریاضی ۹۷)

انتخاب کرد؟

۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۲۲ (۲)

۲۰ (۱)





۱۴۰. به چند طریق می توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۲۰

۱۴۱. تعداد توابع پوشا، از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۴۵۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۵۴۰

۱۴۲. اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند، تعداد زیر مجموعه های

(سراسری ریاضی ۹۸)

$A \cap B'$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۴۳. تعداد مربع های لاتین متعامد با مربع لاتین زیر، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶





۱۴۴. از مجموعه اعداد $\{5, 8, 11, \dots, 65, 68, 71\}$ که به صورت یک تصاعد (دنباله) عددی مرتب شده

است، یک زیرمجموعه حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد در این زیر مجموعه

موجود است که جمع آنها، ۸۲ باشد؟

(سراسری ریاضی ۹۸)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۱۴۵. درون یک مستطیل 9×18 ، حداقل چند نقطه اختیار شود تا مطمئن باشیم لااقل فاصله ۲ نقطه از این

(فارج ریاضی ۹۸)

نقاط انتخابی، کمتر از $3\sqrt{2}$ باشد؟

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

۱۴۶. تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم ۵ و حداقل یک رقم ۲ را شامل شود، کدام است؟

(فارج ریاضی ۹۸)

۵۸ (۴)

۵۶ (۳)

۵۴ (۲)

۵۲ (۱)





۱۴۷. به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، ۱۵ شاخه انتخاب کرد، به طوری که از هر نوع آن حداقل ۲ شاخه

انتخاب شود؟

(فارج ریاضی ۹۸)

۱۵۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۰۵ (۱)

۱۴۸. مجموعه A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است، مجموعه $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه های

$(B \cup A)'$ کدام است؟

(فارج ریاضی ۹۸)

۶۴ (۴)

۴۸ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)

۱۴۹. در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی، به چند طریق می توان برنامه

تدریس، تعیین کرد؟

(فارج ریاضی ۹۸)

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

۱۵۰. در جعبه ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه

برداریم تا مطمئن باشیم حداقل ۴ کتاب، هم موضوع است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

۷ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱)





(سراسری ریاضی ۹۹)

۱۵۱. تعداد جملات در بسط عبارت $(a + b + c)^{12}$ ، کدام است؟

۹۱ (۴)

۸۴ (۳)

۷۸ (۲)

۷۲ (۱)

۱۵۲. حداقل چند عدد از مجموعه اعداد طبیعی متوالی $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ انتخاب شود تا مطمئن باشیم بین

(فارج ریاضی ۹۹)

آن‌ها حداقل دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک، وجود دارد؟

۱۰ (۴)

۱۱ (۳)

۱۲ (۲)

۱۳ (۱)

۱۵۳. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x + y + z + t = 11$ به شرط آنکه $x < 5$ باشد، کدام است؟

(فارج ریاضی ۹۹)

۲۸۰ (۴)

۲۷۰ (۳)

۲۲۰ (۲)

۲۱۰ (۱)

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱۵۴. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_4}$ ، کدام است؟

۹۶ (۴)

۸۱ (۳)

۷۲ (۲)

۶۰ (۱)





(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱۵۵. مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب (a, b) ، کدام است؟

	a	۳		
	۳	۱	۴	
	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
b				

(۱) $(۵, ۳)$ (۲) $(۱, ۴)$ (۳) $(۲, ۱)$ (۴) $(۴, ۱)$ 

(فارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱۵۶. مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب (a, b) ، کدام است؟

		۳		
b	۳	۱	۴	
	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
				a

(۱) $(۴, ۵)$ (۲) $(۴, ۲)$ (۳) $(۱, ۵)$ (۴) $(۱, ۲)$ 

(فارج ریاضی ۱۴۰۰)

۱۵۷. تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

کدام است؟

(۴) ۱۶۸

(۳) ۱۴۴

(۲) ۱۳۶

(۱) ۷۲





(سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

۱۵۸. چند عدد طبیعی کوچک تر از ۶۰۰۰ با مجموع ارقام ۸ وجود دارد؟

۱۵۸ (۴)

۱۶۴ (۳)

۱۶۵ (۲)

۱۵۵ (۱)

۱۵۹. حداقل چند زیرمجموعه از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ انتخاب شود تا مطمئن شویم دو زیرمجموعه با

(سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

اشتراک تهی در آن‌ها وجود دارد؟

۴۶ (۴)

۴۵ (۳)

۶۴ (۲)

۶۵ (۱)

۱۶۰. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 4$ کدام است؟ (فارج ریاضی ۱۴۰۱)

۱۸ (۴)

۳۱ (۳)

۳۰ (۲)

۳۵ (۱)

۱۶۱. در یک کلاس ۶۵ نفری، بیشترین مقدار n به گونه‌ای که مطمئن باشیم حداقل n نفر دارای ماه تولد

(فارج ریاضی ۱۴۰۱)

یکسان هستند، کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)





۱۶۲. هر زیرمجموعه n عضوی از مجموعه $\{12, 13, 14, \dots, m\}$ حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها ۴۷

(سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

است. اگر حداقل مقدار n برابر ۲۰ باشد، بیشترین مقدار m کدام است؟

۴۲ (۴)

۴۰ (۳)

۳۶ (۲)

۳۲ (۱)

۱۶۳. حداقل چند زوج مرتب با مؤلفه‌هایی از اعداد مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ انتخاب کنیم تا به طور قطع،

لااقل در دو جفت انتخاب شده، هر کدام از مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم، مضرب ۵

(سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

باشند؟

۲۶ (۴)

۲۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

۱۶۴. حداقل چند زوج مرتب (a, b) با مؤلفه‌هایی از اعداد مجموعه $\{1, 2, 3\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم

دو زوج مرتب وجود دارد که مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم آنها مضرب ۳ هستند؟

(فارج ریاضی ۱۴۰۲)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)





خلاصه برداری نکات مهم درس





خلاصه برداری نکات مهم درس





خلاصه برداری نکات مهم درس





خلاصه برداری نکات مهم درس

